**Министерство сельского хозяйства Российской Федерации**
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**
**«Горский государственный аграрный университет»**

**З.А. Ахполова, С.З. Алборова**
**А.В, Дзарахохов**

# ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

**учебно – методическое пособие для практических занятий для студентов всех направлений подготовки и специальностей**

**ВЛАДИКАВКАЗ 2023**

УДК 517 (075)
ББК 22.16

**Составители: Ахполова З.А., Алборова С.З., Дзарахохов А.В.**

Элементы высшей математики / Учебное – методическое пособие для практических занятий / – Владикавказ: ФГБОУ ВО Горский ГАУ, 2023 – 52с.

**Рецензенты:**

А.Ф. Цахоева, ФГБОУ ВО «Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова», к.п.н., доцент кафедры «Прикладной математики и информатики»

Рассматриваются основной теоретический материал, примеры с краткими методическими указаниями и решениями, а также задачи по курсу: «Элементы высшей математики». Обозначенные в пособии методические установки позволяют систематизировать знания по математике. Каждая тема снабжена конкретными заданиями для самостоятельной работы, даны методические указания и рекомендации для внедрения в учебный процесс. Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки специалистов среднего звена 09.02.07 Информационные системы и программирование. Пособие можно также рекомендовать для самостоятельного изучения дисциплины «Элементы высшей математики».

## ОГЛАВЛЕНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Данное издание содержит краткий необходимый теоретический и практический материал для самостоятельного решения примеров и контрольной работы по курсу «Элементы высшей математики».

Составление учебно-методического пособия связано с тем, что в нем даются доступно основные понятия и определения и в то же время пособие содержит наиболее важный раздел математики для студентов нетехнических вузов по изучению темы «Элементы высшей математики». Цель методического пособия — помочь студентам овладеть этим материалом. Учебно-методическое пособие в форме лекций знакомит студентов с такими важными понятиями математического анализа, как функция, производная, дифференциал. Пособие поможет студентам легко и быстро найти изучаемые понятия и определения. В работе приводятся примеры, объясняющие появление и использование тех или иных математических понятий. Каждый раздел дает основной теоретический материал, примеры с краткими методическими указаниями и решениями, а также задачи, которые рекомендуются к самостоятельному решению.

# 1. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

## 1.1.Непрерывность функции в точке и непрерывность функции на промежутке

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0 \in D(f)$, если она существует в некоторой окрестности точки $x_0$ и ещё предел этой функции $f(x)$ равен значению функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Важно заметить, что из предела функции в точке её непрерывности $x_0$ равному значению функции в этой точке, следует:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x) = f(x_0),$$

Определение. Функция $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $x_0 \in D(f)$, если существуют равные правосторонний и левосторонний пределы функции $f(x)$ в точке $x_0$ ( $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = B$ $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$ ). Причём они равны значению функции в этой точке( $A = B = f(x_0)$ ).

Определение. Функция $f(x)$ является непрерывной на промежутке *(а;в)*, если она непрерывна во всех точках этого промежутка.

*Теоремы о непрерывных функциях*

Теорема. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x_0$ , то также непрерывны сумма, разность, произведение и частное этих функций: $c \cdot f(x)$ ($c$=const), $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (если $g(x) \neq 0$) в точке $x_0$.

Теорема. Сложная функция $y = f(u(x))$ непрерывна в точке $x_0$, если функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = u(x_0)$, и при этом $u = u(x)$ непрерывна в точке $x_0$.

Теорема. Все элементарные функции также непрерывны в каждой точке области их определения.

## 1.2.Точки разрыва функции и их классификация

Определение. Данная точка $x_0$ называется точкой разрыва функции $f(x)$, если в этой точке функция либо не определена, либо определена, но нарушено одно из условий определения непрерывности $f(x)$.

Определение. Точка $x_0$ называется точкой устранимого разрыва функции $f(x)$, если она имеет предел, но $f(x)$ в точке $x_0$ либо не определена, либо значение функции $f(x_0)$ не совпадающее с существующим пределом, т.е.

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0).$$

Определение. Точка $x_0$ называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$ (разрыв ещё называют «скачок»), если в этой точке функция имеет конечные, но не равные между собой правосторонний и левосторонний пределы, т.е.

$$f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0).$$

Определение. Если в точке $x_0$ функция не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из односторонних пределов бесконечен, то точка $x_0$ называется точкой разрыва второго рода функции $f(x)$.

Пример функции с точкой разрыва первого рода.

$$f(x) = \left\{ \begin{matrix} \cos\frac{\pi x}{2}, \text{если} \left| x \right| \leq 1 \\ \left| 1 - x \right|, \text{если} \left| x \right| > 1 \end{matrix} \right\}$$

Решение. Функция на установленных промежутках равна: на (–∞; –1)

$f(x) = -x + 1$, на (–1;1) $f(x) = \cos\frac{\pi x}{2}$ и на (1;+∞) $f(x) = x - 1$.

На этих промежутках элементарная функция $f(x)$ непрерывна при всех $x$, принадлежащих этим промежуткам. Следует проверить непрерывность в точках $x = -1$ и $x = 1$.

1) $\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (-x + 1) = 2$

2) $\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \cos\frac{\pi x}{2} = \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$

Видно, что условие непрерывности не выполняется, т.е. $f(-1-0) \neq f(-1+0) \Rightarrow x = -1$ – точка разрыва функции $f(x)$ I рода.

3) $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \cos\frac{\pi x}{2} = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

4) $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} (x-1) = 0$

Т.к. $f(1-0) = f(1+0) = f(1) = 0 \Rightarrow$ в этом случае $x = 1$ – точка непрерывности функции $f(x)$.

Делаем вывод: функция $f(x)$ непрерывна на промежутках $(-\infty;-1)$ и на $(-1;+\infty)$, точка $x = -1$ – точка разрыва I рода для функции $f(x)$.

Пример функции с точкой разрыва второго рода.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Решение. На промежутках $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$ функция $f(x)$ непрерывна. Обследуем точку $x = 0 \notin D(f)$.

1) $\lim\limits_{x\to +0} f(x) = \lim\limits_{x\to +0} \frac{1}{x} = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = \lim\limits_{x\to -0} \frac{1}{x} = -\infty \Rightarrow$ $x = 0$ – точка разрыва II рода для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ .

## 2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

После того как мы дали определение непрерывности функции, перейдем к понятию производной функции.

### 2.1.Понятие производной, её геометрический и механический смысл

Дана функция $y = f(x)$ на множестве определения $D(f)$. Рассмотрим некоторую точку $x \in D(f)$ и некое число $\Delta x$ — такое, чтобы точка $x+\Delta x \in D(f)$. Тогда число $\Delta x$ называется приращением аргумента $x$.

Определим значение функции в этих точках $f(x+\Delta x)$ и $f(x)$.

Тогда разность $f(x+\Delta x) - f(x)$ называется приращением функции $y = f(x)$ и обозначается $\Delta f(x)$ (или можно так $\Delta y$), т.е. $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Определение. Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции $\Delta y$ к приращению аргумента $\Delta x$, если приращение аргумента $\Delta x$ стремится к нулю. Производная функции $y = f(x)$ обозначается: $f'(x)$, $y'$ или $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Следовательно, можно записать:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Нахождение производной функции называется дифференцированием этой функции.

Функция, имеющая производную в точке $x_0$, называется дифференцируемой в этой точке. Также функция, дифференцируемая в каждой точке интервала $(a;b)$, называется дифференцируемой на интервале $(a;b)$.

Пример. Исходя из определения, найти $y'$ от функции $y = \dfrac{1}{x}$.

Решение. Фиксируем точку $x$, и даём ей приращение $\Delta x$,

Тогда $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) =$

$$= \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)} = \frac{x-x-\Delta x}{x(x+\Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)} \Rightarrow \Delta y = \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}.$$

После чего рассмотрим отношение приращения функции $\Delta y$ к приращению аргумента $\Delta x$. Затем переходим к пределу:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)\cdot \Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x^2 + x\cdot \Delta x} = \frac{-1}{x^2 + x\cdot 0} = -\frac{1}{x^2}.$$

В итоге получаем: $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.

*Механический смысл производной*

Рассмотрим материальную точку, которая движется по прямой, по некоторому закону $S = S(t)$, тогда $\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t)$ — расстояние, пройденное за время $\Delta t$, и средняя скорость движения равна:

$$V_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Для того чтобы определить скорость $V_{cp}$ движения в момент времени $t$, рассмотрим её предел при $\Delta t \to 0$:

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t).$$

Получается, производная от пути $S(t)$ равна мгновенной скорости точки в момент времени $t$:

$$S'(t) = V(t).$$

*Геометрический смысл производной*

Фиксируем точку $M_0$.

В её окрестности рассмотрим график функции $y = f(x)$ (рис. 1).

Точка $M_0(x_0;y(x_0))$ – фиксированная точка графика $y = f(x)$. Тогда точка $M(x_0+\Delta x;\ y(x_0+\Delta x))$ при различных значениях $\Delta x$, где $\Delta x$ — любая точка на графике. Если точка $M$ стремится к точке $M_0$ (при этом $\Delta x \to 0$), то секущая линия $M_0M$ приближается к своему предельному положению, которая является касательной к линии $y = f(x)$ в точке $M_0$.

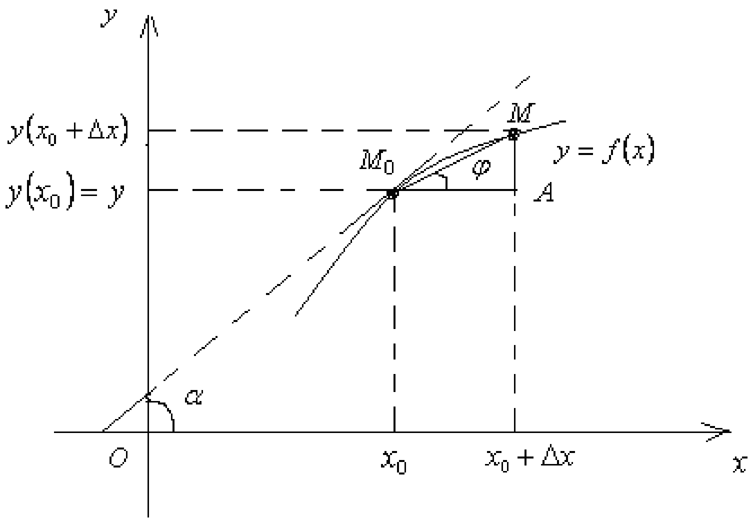



*Рис. 1— Геометрический смысл производной*

Вспоминаем школьную программу тригонометрии:

Тангенс угла — это отношение катетов, противолежащего *MA* к прилежащему

$M_0A$.

Перейдем к треугольнику $\Delta M_0MA$: tg φ = $\dfrac{MA}{M_0A}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, где φ – угол наклона секущей $M_0M$ к оси *Ox*.

Рассмотрим:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ (M\to M_0)}} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha, \text{ при } \Delta x\to 0$$

где α — угол наклона касательной к оси *Ox*.

Итак, угловой коэффициент касательной, проведённой к линии $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y(x_0))$, равен $y'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$ и является геометрическим пониманием производной функции $y=f(x)$ в точке $x_0$. Тогда, используя уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0;y_0)$ с определённым угловым коэффициентом $K_{кас} = y'(x_0)$, получим уравнение касательной к линии $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; f(x_0))$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

## 2.2. Примеры вывода производных отдельных элементарных функций

1) Отталкиваясь от определения производной, найти $y'$ от функции $y = \sin x$,

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cdot\cos\frac{x+\Delta x + x}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\frac{2x+\Delta x}{2}$$

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = 1\cdot\cos x = \cos x.$$

таким образом: $(\sin x)' = \cos x$

2) Вывести $y'$ от функции: $y = \cos x$;

Делаем вывод: $\Delta y = \cos(x+\Delta x) - \cos x =$

$$= 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cdot\sin\frac{x+\Delta x + x}{2} = -2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\sin\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right)$$

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\sin\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= -1\cdot\sin x = -\sin x.$$

таким образом: $(\cos x)' = -\sin x$

3) Вывести $y'$ от функции $y = \log_a x$

Делаем вывод: $y = \log_a x$; следовательно

$$\Delta y = \log_a(x+\Delta x) - \log_a x = \log_a\frac{x+\Delta x}{x} = \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \log_a\left(\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\right) = \log_a e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}$$

Используя свойства логарифмов и второй замечательный предел, получаем:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$$

4) Вывести $y'$ от функции $y = \ln x$

Так как $\ln x = \log_e x$, то, используя правило производной для $(\log_a x)$, можно записать:

$$(\ln x)' = (\log_e x)' = \frac{1}{x\cdot\ln e} = \frac{1}{x}\ .$$

Таким образом $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

5) Вывести $y'$ от функции $y = c$ .

Так как $y = c$, то $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = c - c = 0$ $\Rightarrow (c)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0}{\Delta x} = 0$. Таким образом $\mathbf{(c)' = 0}$

### 2.3. Дифференцируемость функции

Пусть в некоторой окрестности точки $x$ существует функция $y = f(x)$. Тогда функция $y$ называется дифференцируемой в точке $x\in D(y)$, и её приращение в этой точке равно:

$$\Delta x = A\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x,$$

где $A = A(x)$ не зависит от $\Delta x$; $\alpha(\Delta x)$ — настолько малая величина при $\Delta x\to 0$, что её предел равен нулю: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = 0$.

Теорема (связь существования производной функции с дифференцируемостью). Функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x \in D(y)$ в том случае, когда она имеет в этой точке производную $f'(x)$.
При этом $f'(x) = A$.

Теорема (связь непрерывности функции с дифференцируемостью). Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x$, если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x$, где $x \in D(y)$

**2.4. Правила дифференцирования. Таблица производных**

Пусть функции $U = U(x)$ и $V = V(x)$

Теорема. Если две функции $U$ и $V$ дифференцируемы в точке $x$, то функция, составленная из суммы $U+V$ (разности $U–V$), дифференцируема в точке $x$.

Её производная вычисляется по формуле:

$$(U(x) \pm V(x))' = (U(x))' \pm (V(x))'$$

В практике можно записать так: $(U \pm V)' = (U)' \pm (V)'$.

Теорема. Если две функции $U$ и $V$ дифференцируемы в точке $x$, то составленная из произведения $U \cdot V$ функция, дифференцируема в точке $x$.

Её производная вычисляется по формуле:

$$(U(x) \cdot V(x))' = (U(x))' \cdot V(x) + U(x) \cdot (V(x))'$$

В практике можно записать так: $(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'$.

Примечание:

а) Если три функции $U(x)$, $V(x)$ и $W(x)$ дифференцируемы в точке $x$, то функция $(U(x) \cdot V(x) \cdot W(x))$ дифференцируема в точке $x$ и её производная вычисляется по формуле:

$$(U \cdot V \cdot W)' = U' \cdot V \cdot W + U \cdot V' \cdot W + U \cdot V \cdot W'.$$

б) Производная произведения постоянной и дифференцируемой функции равна этой постоянной, умноженной на производную этой функции:

$$(\mathrm{C} \cdot U(x))' = \mathrm{C} \cdot U'(x).$$

Теорема. Если две функции $U$ и $V$ дифференцируемы в точке $x$, то частное $\frac{U}{V}$ дифференцируемо в точке $x$.

Производная частного вычисляется по формуле:

$$\left(\frac{U(x)}{V(x)}\right)' = \frac{U'(x)V(x) - U(x)\cdot V'(x)}{V^2(x)}, \text{ где } V(x) \neq 0.$$

В практике можно записать так: $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - U\cdot V'}{V^2}$

Теорема (производная сложной функции). Если функция $f(u)$ дифференцируема в точке $u$, а функция $u(x)$ дифференцируема в точке $x$, где $u = u(x)$, тогда сложная функция $f(u(x))$ дифференцируема в точке $x$.

Её производная вычисляется по формуле:

$$(f(u(x)))' = f'(u)\cdot u'(x).$$

| Правила дифференцирования | |
|---|---|
| 1. $(U \pm V)' = U' \pm V'$ | |
| 2. $(U\cdot V)' = U'\cdot V + U\cdot V'$ | |
| 3. $(c\cdot U)' = c\cdot U'$ | |
| 4. $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'\cdot V - U\cdot V'}{V^2}$ | |
| 5. $\left(\frac{U}{c}\right)' = \frac{U'}{c} = \frac{1}{c}\cdot U'$ | |
| 6. $\left(\frac{c}{V}\right)' = -\frac{c\cdot V'}{V^2},\quad (V \neq 0)$ | |
| Таблица производных | |
| простых функций | сложных функций |
| 7. $(c)' = 0$ | |
| 8. $(x)' = 1$ | |

| | |
|---|---|
| 9. $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$ | 9. $\left(U^n\right)' = n \cdot U^{n-1} \cdot U'$ |
| 10. $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$ | 10. $\left(\frac{1}{U}\right)' = \frac{-1}{U^2} \cdot U'$ |
| 11. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | 11. $\left(\sqrt{U}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{U}} \cdot U'$ |
| 12. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$ | 12. $\left(a^U\right)' = a^U \cdot \ln a \cdot U'$ |
| 13. $\left(e^x\right)' = e^x$ | 13. $\left(e^U\right)' = e^U \cdot U'$ |
| 14. $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ | 14. $\left(\log_a U\right)' = \frac{1}{U \cdot \ln a} \cdot U'$ |
| 15. $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$ | 15. $\left(\ln U\right)' = \frac{1}{U} \cdot U'$ |
| 16. $\left(\sin x\right)' = \cos x$ | 16. $\left(\sin U\right)' = \cos U \cdot U'$ |
| 17. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$ | 17. $\left(\cos U\right)' = -\sin U \cdot U'$ |
| 18. $\left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ | 18. $\left(tgU\right)' = \frac{1}{\cos^2 U} \cdot U'$ |
| 19. $\left(ctgx\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ | 19. $\left(ctgU\right)' = -\frac{1}{\sin^2 U} \cdot U'$ |
| 20. $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | 20. $\left(\arcsin U\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot U'$ |
| 21. $\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | 21. $\left(\arccos U\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot U'$ |
| 22. $\left(\mathrm{arc}\, tgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}$ | 22. $\left(\mathrm{arc}\, tgU\right)' = \frac{1}{1+U^2} \cdot U'$ |
| 23. $\left(\mathrm{arc}\, ctgx\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$ | 23. $\left(\mathrm{arc}\, ctgU\right)' = -\frac{1}{1+U^2} \cdot U'$ |

Пример. Вычислить производную $y'$

$$y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2;$$

Решение: В этом примере функция имеет вид $y = u^2$, где $u=\frac{x+1}{x-1}$, тогда её производную находим по формуле: $y'=2u\cdot u'$ или

$$y'=2\frac{x+1}{x-1}\cdot\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'=2\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}=2\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}=-\frac{4(x+1)}{(x-1)^3}$$

Пример. Вычислить производную $y'$

$$y=\log_5\left(x^3-1\right);$$

Решение. Здесь функция имеет вид $y=\log_5 u$, где подлогарифмическая функция равна $u = x^3 - 1$, тогда $y'=\frac{\left(x^3-1\right)'}{\left(x^3-1\right)\ln 5}=\frac{3x^2}{\left(x^3-1\right)\ln 5}$;

Пример. Вычислить производную $y'$

$$y=\sin^2(2x-1).$$

Решение. Данная сложная функция является степенной: $y = u^2$, где $u=\sin(2x-1)$. Воспользуемся формулами: $\left(U^n\right)'=n\cdot U^{n-1}\cdot U'$ и

$(\sin U)'=\cos U\cdot U'$

Получим

$$y'=2u\cdot u'=2\sin(2x-1)\cdot\left[\sin(2x-1)\right]'=2\sin(2x-1)\cdot\cos(2x-1)\cdot(2x-1)'=$$
$$=2\sin(2x-2)\cdot\cos(2x-1)\cdot 2=2\sin 2(2x-1)$$

### 2.5. Неявная функция и её дифференцирование

Пусть функция $y=f(x)$ задана неявно $F(x;y)=0$. Дифференцируем это равенство по *x*, по правилу дифференцирования сложной функции. Выражаем из полученного равенства производную $y'$.

Пример. Найти $y'$, если функция $y$ задана уравнением

$$y^3 - 3y + 2ax = 0$$

Дифференцируем обе части по переменной $x$, считая $y$ функцией от $x$:

$3y^2 \cdot y' - 3y' + 2a = 0$, выразим $y'$, отсюда $y' = \dfrac{2a}{3\left(1 - y^2\right)}$.

Пример. Найти $y'$, если функция $y$ задана уравнением

$$arctgy - y + x = 0$$

Дифференцируем обе части по переменной $x$, считая $y$ функцией от $x$:

$\dfrac{y'(x)}{1+y^2} - y' = 1$, выразим $y'$, отсюда имеем $y' = y^{-2}(1+y^2) = 1 + y^{-2}$

Пример. Найти $y'$, если функция $y$ задана уравнением

$$x^3 + y^3 - xy = 0$$

Дифференцируем обе части по переменной $x$, считая $y$ функцией от $x$:

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' - y - xy' = 0$$

$$y'(3y^2 - x) = y - 3x^2$$

$$y' = \frac{y - 3x^2}{3y^2 - x}$$

Итог: $y' = \dfrac{y - 3x^2}{3y^2 - x}$.

Определение. Если для функции $y = f(x)$ производная $y'_x \neq 0$, то производная обратной функции $x = f(y)$ есть $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$

Пример. Найти производную обратной функции $x'_y$, если

$y = x + lnx$.

Имеем $y'_x = 1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x+1}{x}$, следовательно $x'_y = \dfrac{x}{x+1}$.

### 2.6. Производные показательной и степенной функций

Степенная функция вида $y = x^{\alpha}$ ($\alpha \in$ R) дифференцируема по $x \in$ R

$$(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}.$$

Показательная функция вида $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) дифференцируема по $x \in$ R

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

В частном случае, при $a = e$ полученная формула в предыдущей теореме принимает такой вид:

$$(e^x)' = e^x \cdot \ln e \quad \text{или} \quad (e^x)' = e^x.$$

Теорема. Если две функции $U(x)$ и $V(x)$ дифференцируемы в точке $x$, то показательно-степенная функция $y = (U(x))^{V(x)}$ дифференцируема в точке $x$.

Справедлива данная формула:

$$\left((U(x))^{V(x)}\right)' = (U(x))^{V(x)} \cdot V'(x) \ln U(x) + U'(x) \cdot V(x) \cdot (U(x))^{V(x)-1}$$

В практике: $\left(U^V\right)' = U^V \cdot V' \ln U + U' V \cdot U^{V-1}$.

### 2.7. Производная функции заданной параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ является параметрической: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда, если функции x(t) и y(t) имеют производные в точке $t_0$, причем $x'(t_0) \neq 0$, а функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x_0 = x(t_0)$, то эта производная находится по формуле

$$y'(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)} \quad \text{или в практике записывается так:} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Пример. Найти $y'(x)$ для функции заданной параметрически

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}.$$

Решение. Найдем производную первой функции

$$x'_t = (t - \sin t)'_t = 1 - \cos t$$

Найдем производную второй функции $y'_t = (1 - \cos t)'_t = \sin t$

Подставим в формулу, упростим:

$$y'_t = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = ctg\,\frac{t}{2}\,.$$

Это и есть производная параметрической функции:

$$y'_t = \frac{y'_t}{x'_t} = ctg\,\frac{t}{2}$$

### 2.8. Логарифмическая производная

В некоторых примерах лучше находить производную методом логарифмирования предварительно.

Определение. Логарифмической производной функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т.е.

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}$$

В практике нахождение производных от функций, которые допускают операцию логарифмирования (содержащие произведение, частное, возведение в степень, а также извлечение корня), намного упрощается, если функцию изначально прологарифмировать.

Пример. Найти производную $y'$, если $y = (x-1)\sqrt[3]{(5x+1)^2(x+1)}$.

Теперь нужно максимально разложить логарифм правой части по формулам школьной программы.

Свойства логарифмов: $log_a(x \cdot y) = log_a x + log_a y$

$$log_a\, xy = log_a x - log_a y$$

$$log_a\, x^n = n\, log_a x$$

$$log_a\, 1/x = -\, log_a x$$

$$log_a \sqrt[n]{\boxed{x}} = 1/n\, log_a x$$

Решение: $\ln y = \ln(x-1) + \frac{2}{3}\ln(5x+1) + \frac{1}{3}\ln(x+1)$;

Производная правой части довольно простая.

В левой части у нас сложная функция. Одна буква $y$ сама по себе является функцией. Поэтому логарифм — это внешняя функция, а $y$ — внутренняя функция. И мы используем правило дифференцирования сложной функции:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x-1} + \frac{10}{3(5x+1)} + \frac{1}{3(x+1)} = \frac{2(15x^2+7x-4)}{3(x^2-1)(5x+1)},$$

В левой части у нас появилась производная $y'$. Далее, пользуясь основным правилом пропорции, перемещаем $y$ из знаменателя левой части в числитель правой части.

Вспоминаем о функции, смотрим на условие: $y = (x-1)\sqrt[3]{(5x+1)^2(x+1)}$

Делаем замену и получаем окончательный ответ:

$$y' = \frac{2(15x^2+7x-4)}{3(x^2-1)(5x+1)}(x-1)\sqrt[3]{(5x+1)^2(x+1)} = \frac{2(15x^2+7x-4)}{3\sqrt[3]{(x+1)^2(5x+1)}}.$$

Пример. Вычислить производную функции $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ в точке $x = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Произведём преобразование правой части функции $f(x) = \frac{1}{2}[\ln(1-\sin x) - \ln(1+\sin x)]$.

Затем вычислим производную, упростим, получим: $f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{-\cos x}{1-\sin x}-\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)=-\frac{1}{\cos x}$. Полагая $x=\frac{\pi}{4}$, подставим и вычислим: $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}=-\sqrt{2}$.

### 2.9. Дифференциал функции

Пусть данная функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x$, тогда её приращение можно записать в виде двух слагаемых, первое из которых линейно относительно $\Delta x$, а второе слагаемое $\alpha$ — бесконечно малая величина, т.е. $\alpha(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$:

$$\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x\ .$$

Определение. Первое слагаемое $f\,'(x)\cdot\Delta x$ называется главной линейной относительно $\Delta x$ частью приращения функции $y = f(x)$, при этом называемой дифференциалом этой функции.

Дифференциал функции обозначается

$$dy = y'\,(x)\cdot \Delta x\ .$$

Если $x$ – независимая переменная, то справедливо равенство $\Delta x = dx$, так как $(x)' = 1$. Тогда данная формула для дифференциала запишется:

$$dy = y'\,(x)\cdot dx\ .$$

Так как в равенстве второе слагаемое приращения функции – бесконечно малая величина более высокого порядка по сравнению с $\Delta x$, то между приращением функции $\Delta y$ и её дифференциалом $dy$ можно приближённо поставить знак равенства. Тогда это равенство тем точнее, чем меньше $\Delta x$. Следовательно, из приближённого равенства получается приближённое значение дифференцируемой функции:

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\cong f'(x_0)\cdot\Delta x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_0+\Delta x)\cong f'(x_0)\cdot\Delta x+f(x_0)$$

Пример. Вычислить приближённо $\sqrt{4.08}$

Решение. Рассмотрим заданную функцию $y = \sqrt{x}$. В качестве начальной точки берём $x_0 = 4$, некое приращение $\Delta x = 0{,}08$, $f(x_0) = \sqrt{4} = 2$ и подставим в формулу:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cong f'(x_0) \cdot \Delta x$$

$$\sqrt{4 + 0{,}08} - \sqrt{4} \cong \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 0{,}08$$

$$\sqrt{4{,}08} \cong 2 + \frac{0{,}04}{2}$$

$$\sqrt{4{,}08} \cong 2{,}02 \Rightarrow \sqrt{4{,}08} = 2{,}02 \pm \Delta,$$

где $\Delta << 0{,}08$.

*Геометрический смысл дифференциала*

Дан график дифференцируемой функции $y = f(x)$.

Рассмотрим его в некоторой окрестности точки $x_0$ (рис. 2):

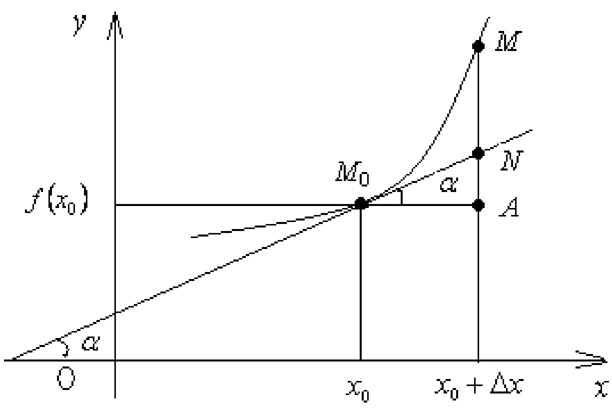



*Рис. 2 — Геометрический смысл дифференциала*

Из $\Delta M_0AN$

$$AN = M_0A \cdot \mathrm{tg}\, \alpha = \Delta x \cdot f'(x_0) = \mathrm{d}y.$$

Тогда дифференциал нашей функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ равен приращению ординаты касательной ($AN$), проведённой к кривой $y = f(x)$ в точке ($x_0$; $f(x_0)$), при переходе от $x_0$ к $x_0+\Delta x$ (от точки $M_0$ в точку $M$).

*Дифференциал для сложной функции*

Теорема. Рассмотрим функцию $y = f(u)$, дифференцируемую в точке $u$, а функцию $u = u(x)$, дифференцируемую в соответствующей точке $x$. Тогда для полученной сложной функции $y = f(u(x))$ справедливо равенство:

$$dy = f'(u)du = y'(x)dx.$$

## 2.10. Производные и дифференциалы высших порядков

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на определённом промежутке, то она имеет на этом промежутке производную $y' = f'(x)$, которая, в свою очередь, может иметь производную $(y')' = (f'(x))' = y''$. Она называется производной второго порядка функции $y = f(x)$. И обозначается:

$$y''(x) = (y')' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$$

Если же новая функция $y''(x)$ имеет производную, тогда она называется производной третьего порядка функции $y = f(x)$ и обозначается:

$$y'''(x) = (y'')' = \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} \quad \textit{и т.д.}$$

А производная “n”-го порядка функции $y = f(x)$ имеет вид:

$$y^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = \left(y^{(n-1)}(x)\right)'$$

Дифференциалом второго порядка функции $y = f(x)$ в точке $x$ называется выражение вида $\mathrm{d}^2 y$ и вычисляемое по данной формуле:

$$\mathrm{d}^2 y = f''(x)(\mathrm{d}x)^2,$$

где $x$ — независимая переменная.

Дифференциал же третьего порядка функции $y = f(x)$:

$$d^3y = f'''(x)(dx)^3,$$

где $x$ — независимая переменная, и т.д.

## 3. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА ОТРЕЗКЕ

Теорема. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ при любых $x \in [a;b]$ она достигает на этом отрезке своих наименьшего $m$ и наибольшего $M$ значений, то справедливо неравенство:

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Теорема. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то для любого числа $C$, удовлетворяющего неравенству $m \leq C \leq M$, на этом отрезке $[a;b]$ найдётся хотя бы одна точка $x_0$, для которой выполняется равенство:

$$f(x_0) = C.$$

Теорема. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на концах этого отрезка имеет различные знаки, то существует $x$ такая точка $x_0 \in (a;b)$, для которой выполняется равенство:

$$f(x_0) = 0.$$

### 3.1.Теорема Ролля

Теорема (Ролля). Если функция $y=f(x)$ определена на данном отрезке $[a;b]$ и выполняются следующие условия:

1) $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$,

2) $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$,

3) значения функции равны на концах отрезка $f(a) = f(b)$,

то внутри данного отрезка $[a;b]$ найдется такая точка $x_0$, для которой справедливо равенство:

$$f'(x_0) = 0.$$

*Геометрический смысл теоремы Ролля*

Точка с координатами ($x_0$ ; $f$ ($x_0$)), где $x_0 \in$ ($a$;$b$), в которой касательная параллельна оси О$x$ (рис. 3), есть геометрический смысл теоремы Ролля для графика функции, непрерывной на отрезке [$a$;$b$], дифференцируемой на интервале ($a$;$b$) и принимающей на концах отрезка равные значения.

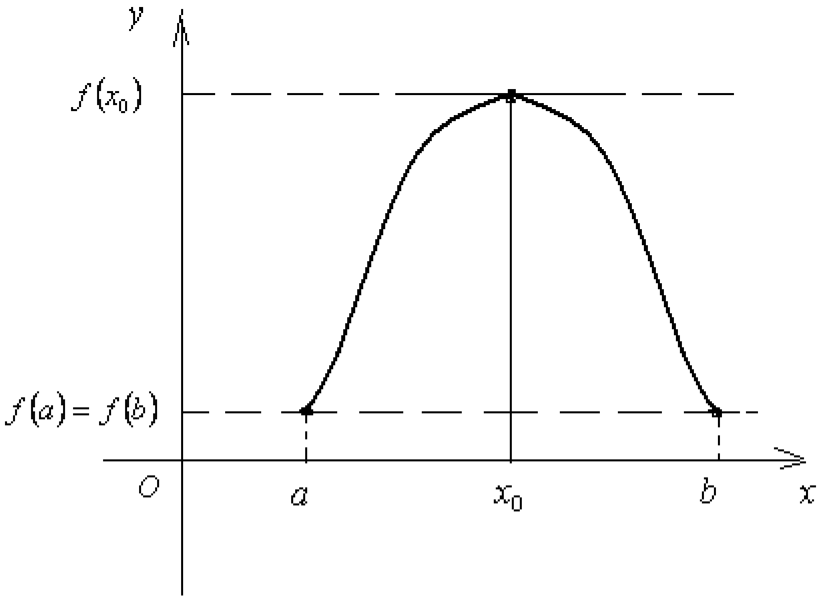



*Рис. 3— Геометрический смысл теоремы Ролля*

## 3.2.Теорема Лагранжа

Теорема (Лагранжа). Если данная функция $y=f(x)$ определена на отрезке [$a$;$b$] и выполнены условия:

1) $f(x)$ непрерывна на отрезке [a;b],
2) $f(x)$ дифференцируема на интервале ($a$;$b$),

то внутри этого отрезка имеется хотя бы одна точка $x_0$, для которой справедливо равенство:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

*Геометрический смысл теоремы Лагранжа*

Точка ($x_0$; $f$($x_0$)), в которой касательная параллельна секущей, проходящей через точки $A$($a$; $f$($a$)); $B$($b$; $f$($b$)), есть геометрический смысл теоремы Лагранжа для графика функции, непрерывной на отрезке [$a$;$b$], дифференцируемой на интервале $(a;b)$ и принимающей на концах отрезка равные значения (рис. 4).

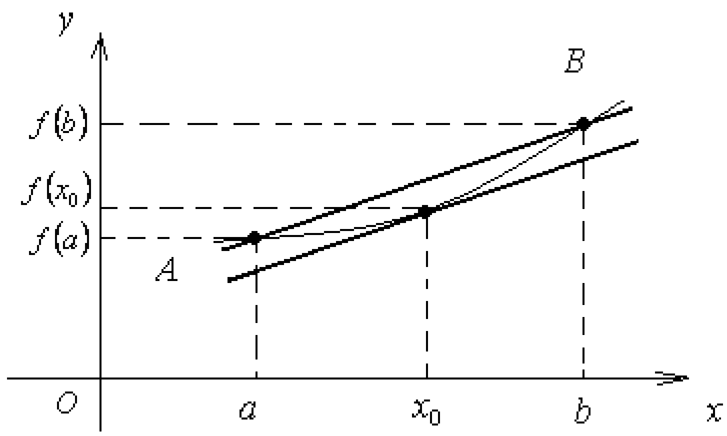



*Рис.4— Геометрический смысл теоремы Лагранжа*

**3.3.Теорема Коши**

Теорема (Коши). Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на отрезке $[a;b]$ и удовлетворяют следующим условиям:

1) $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$,

2) $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале $(a;b)$,

3) $g'(x) \neq 0$ при любом $x \in (a;b)$,

то внутри отрезка $[a;b]$ найдётся хотя бы одна такая точка $x_0$, для которой выполняется равенство:

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

**3.4. Правило Лопиталя**

Теорема (правило Лопиталя). Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки $x_0$ и дифференцируемы в каждой точке этой окрестности за исключением, может быть, самой точки $x_0$, где $g'(x) \neq 0$, и

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \qquad \text{или} \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$$

тогда, если существует $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ конечный или бесконечный, выполняется равенство:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Правило Лопиталя применяется для раскрытия неопределённостей типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, встречающихся при нахождении пределов. Если под знаком предела получаются неопределённости другого вида: $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, $1^0$, $0^0$ или $\infty^0$, то с помощью разных элементарных преобразований их приводят к неопределённостям $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, и применяется правило Лопиталя.

Правило Лопиталя можно применить вторично. Т.е.:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

Пример. Найти предел, применяя правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin 5x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{5\cos 5x}=\frac{2\cdot 1}{5\cdot 1}=\frac{2}{5}$$

Пример. Найти предел, применяя правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{2x+3}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{2}{e^x}=\left(\frac{2}{\infty}\right)=0$$

Пример. Найти предел, применяя правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{6}.$$

Пример. Найти предел, применяя правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to +0}(x\cdot\ln x)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to +0}x=0.$$

Пример. Найти предел, применяя правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}\ x\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=\left(\frac{0}{1}\right)=0$$

Пример. Найти предел, применяя правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}x^{\sin x}=\left(0^0\right)=\lim_{x\to 0}e^{\ln(x^{\sin x})}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}\right)}=e^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{-x\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{-\cos x}}=e^{1\cdot 0}=e^0=1.$$

# 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ

## 4.1.Асимптоты плоской кривой

Асимптота от древне-греческого слова — несовпадающая, не касающаяся кривой. Термин впервые применил Архимед при изучении гиперболы, после появился у А. Пергского (Аполло́ний Пергский— древнегреческий математик, один из трёх (наряду с Евклидом и Архимедом) великих геометров древности, живших в III веке до н. э.).

Определение 1. Асимптотами называются прямые, к которым сколь угодно близко подходит график функции $y = f(x)$, когда переменная $x$ стремится к $+\infty$ или $-\infty$.

Представьте переменную точку $M(x; y)$, которая перемещается по графику функции.

Определение 2. Прямая называется асимптотой графика функции $y = f(x)$, если расстояние от переменной точки $M(x; y)$ графика функции до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки $M(x; y)$ к бесконечности.

Виды асимптот бывают вертикальные и наклонные.

Итак, при $x = a$ прямая является вертикальной асимптотой кривой $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ равен $\pm\infty$.

Если прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой кривой $y = f(x)$, то в точке $x = a$ функция имеет разрыв второго рода. И наоборот, если в точке $x = a$ функция имеет разрыв второго рода, то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$.

Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой для $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ ( или $x \to -\infty$), если функцию $f(x)$ можно представить в виде:

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$).

Для нахождения наклонной асимптоты необходимо и достаточно существование двух конечных пределов, при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$):

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - k\cdot x) = b$$

Пример. Вычислить асимптоты кривой $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$.

Решение.

1) $D(y) = (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$.

2) Точки $x = -1$ и $x = 1$ будут точками разрыва второго рода, так как:

$$\lim_{x\to-1+0} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to-1+0} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \left(\frac{(-1)^3}{(-1+0-1)(-1+0+1)}\right) = \left(\frac{-1}{-2\cdot(+0)}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-1-0} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to-1-0} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \left(\frac{(-1)^3}{(-1-0-1)(-1-0+1)}\right) = \left(\frac{-1}{-2\cdot(-0)}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to1+0} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to1+0} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \left(\frac{1^3}{(1+0-1)(1+0+1)}\right) = \frac{1}{(+0)\cdot 2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^3}{x^2-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^3}{(x-1)(x+1)}=\left(\frac{1^3}{(1-0-1)(1-0+1)}\right)=\frac{1}{(-0)\cdot 2}=-\infty$$

В таком случае прямые $x = -1$ и $x = 1$ являются вертикальными асимптотами.

3) Вычислим пределы:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2-1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x}=1,\ k=1.$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-k\cdot x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-1}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0,b=0$$

тогда, при $x\to+\infty$, прямая $y = 1\cdot x + 0$, следовательно, $y = x$ будет наклонной асимптотой.

Находя те же пределы при $x\to-\infty$, получим $k = 1$ и $b = 0$, тогда прямая $y = x$ окажется наклонной асимптотой при $x\to-\infty$.

Итак: $x = \pm 1$ — вертикальные асимптоты

$y = x$ — наклонная асимптота при $x \to \pm\infty$.

### 4.2. Монотонность функции. Экстремумы функции

Определение. Функция $y = f(x)$ является возрастающей (убывающей) на промежутке $(a;в)$, если для любых $x_1$ и $x_2$, принадлежащих этому промежутку $(a;в)$, при условии $x_2 > x_1$ справедливо неравенство:

$$f(x_2) > f(x_1) \quad (f(x_2) < f(x_1)).$$

Функция $y = f(x)$ является монотонной на промежутке $(a;b)$, если она на этом промежутке $(a;в)$ является только возрастающей или только убывающей.

Теорема (достаточные условия монотонности). Если данная функция $y = f(x)$ дифференцируема на промежутке $(a;в)$ и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для любых $x \in (a;в)$, то функция только возрастает (убывает) на этом промежутке.

Определение. Функция $y = f(x)$ имеет в точке $x_0 \in D(f)$ максимум $y_{max}$ (минимум $y_{\min}$), если существует некая окрестность точки $x_0$, в которой для всех $x$ выполняется неравенство:

$$f(x_0) > f(x) \quad (f(x_0) < f(x)).$$

Точки максимум (max) и минимум (min) функции называются точками экстремума функции.

Теорема (необходимое условие экстремума). Если данная функция

$y = f(x)$ имеет экстремум в некоторой точке $x_0$, то в этой точке производная функции $f(x)$ равна нулю или не существует.

Теорема (достаточное условие экстремума). Если данная функция

$y = f(x)$ непрерывна в некоторой точке $x_0$, дифференцируема в её окрестности, за исключением самой этой точки, $f'(x_0) = 0$ или не существует и при переходе через точку $x_0$ производная $f'(x)$ изменяет знак, то точка $x_0$ является точкой экстремума. Если при этом знак $f'(x)$ меняется

с $+$ на $-$, то $x_0$ — точка максимума,

с $-$ на $+$, то $x_0$ — точка минимума.

### 4.3. Выпуклость, вогнутость и точки перегиба графика функции

Если данная функция $y = f(x)$ дифференцируема в любой точке на промежутке $(a;b)$,она имеет конечную производную в любой точке данного промежутка. Следовательно, существует касательная к графику функции $y = f(x)$ в любой его точке $(x; f(x))$ при $a < x < b$.

Определение. График функции $y = f(x)$, дифференцируемой в каждой точке промежутка $(a;b)$, называется выпуклым (вогнутым) на промежутке $(a;b)$, если для любого $x \in (a;b)$ график находится не выше (не ниже) касательной к графику в точке $(x; f(x))$.

Теорема (достаточное условие выпуклости или вогнутости кривой). Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на промежутке $(a;b)$ и $f''(x)$

при $x \in (a;b)$ сохраняет свой знак (–) на этом промежутке, т.е. $f''(x) \le 0$ при $x \in (a;b)$, тогда кривая $y = f(x)$ выпуклая; а если сохраняет свой знак (+) на этом промежутке, т.е. $f''(x) \ge 0$ при $x \in (a;b)$, тогда кривая $y = f(x)$ вогнутая.

Определение. Точка $(x_0;\ f(x_0))$ перехода выпуклой части кривой от вогнутой (или наоборот) называется точкой перегиба графика функции $y = f(x)$.

Теорема (достаточное условие точки перегиба). Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в окрестности точки $x_0$, и вторая производная функции $f''(x_0) = 0$ (или не существует), и при этом $f''(x)$ меняет свой знак при переходе $x$ через точку $x_0$, то точка $(x_0;\ f(x_0))$ является точкой перегиба кривой $y = f(x)$.

### 4.4. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на отрезке $[a;b]$.

Определение. Число $f(c)$ называется наибольшим (наименьшим) значением функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается $\max\limits_{[a;b]} f(x)$ ($\min\limits_{[a;b]} f(x)$), если для любого $x \in [a;b]$ выполняется неравенство:

$$f(x) \le f(c) \quad (f(x) \ge f(c)) .$$

Если рассматриваемая функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то по свойству непрерывной функции на отрезке она достигает своих наибольшего и наименьшего значений.

*Схема нахождения наибольшего и наименьшего значений следующая:*

1) Найти все точки, в которых $f'(x) = 0$ (или не существует). Выбрать те точки из полученных, которые попадают на отрезок $[a;b]$.

2) Вычислить в полученных точках значения функции $f(x)$ .

3) Вычислить значения функции $f(x)$ на концах отрезка $[a;b]$: $f(a)$ и $f(b)$.

4) Найти наибольшее число $M$ и наименьшее $m$.

Тогда $M = \max\limits_{[a;b]} f(x),\ \ m = \min\limits_{[a;b]} f(x).$

## 4.5.Схема исследования функции. Построение графика

1) Определить область определения функции $y = f(x)$ – множество $D(f)$ тех значений $x$, при которых функция $y = f(x)$ имеет смысл.

2) Исследовать функцию на периодичность: выяснить, существует ли наименьшее положительное число $T$ такое, что $f(x+T) = f(x)$ для любого $x \in D(f)$.

3) Исследовать функцию $f(x)$ на чётность и нечётность: при этом выяснить, выполняются ли равенства:

$f(-x) = f(x)$ для любого $x \in D(f)$ —чётность

или

$f(-x) = -f(x)$ для любого $x \in D(f)$ —нечётность.

Это позволяет узнать симметрию графика: относительно оси О$y$ — чётная или относительно начала координат — нечётная.

4) Найти точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осями координат:

~ с осью О$y$: точка $(0; f(0))$, если $0 \in D(f)$,

~ с осью О$x$: точка $(x_k; 0)$, где $x_k \in D(f)$ и является решением уравнения

$f(x) = 0$.

5) Определить промежутки знакопостоянства: выяснить, при каких $x \in D(f)$ выполняются неравенства $f(x) > 0$ (график функции расположен над осью О$x$) и $f(x) < 0$ (график функции расположен под осью О$x$).

6) Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность, установить типы разрыва.

7) Найти вертикальные и наклонные асимптоты.

8) Найти промежутки убывания и возрастания, экстремумы функции.

9) Определить множество $E(f)$ значений функции.

10) Найти промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика.

11) Построить график функции, используя свойства, установленные в проведенном исследовании. Если в некоторых промежутках график остался неясным, то его уточняют по дополнительным точкам.

Пример. Исследовать функцию $y = (x + 2)e^{-x}$ и построить её график.

1) $D(y)$ = R.

2) Функция не периодическая.

3) Определяем, что $y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$, то функция общего вида, не является ни чётной, ни нечётной.

4) Точка пересечения графика с осью O$x$ : (– 2; 0), с O$y$ : (0; 2)

5) При $x \in (-\infty; -2)$ функция отрицательная, при $x \in (-2; +\infty)$ функция положительная.

6) Функция непрерывна при $x \in$ R.

7) Вертикальных асимптот нет.

Найдём наклонные асимптоты, заданные формулой: $y = kx + b$.

а) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)e^{-x}}{x} = \left(\frac{\infty\cdot 0}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{xe^{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}+xe^{x}} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0 \Rightarrow \ k = 0 \text{ при } x \to +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty}((x+2)e^{-x} - 0) = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{e^{x}} =$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0$$

$$b = 0 \text{ при } x \to +\infty.$$

Тогда, $y = 0$ – является горизонтальной асимптотой при $x \to +\infty$.

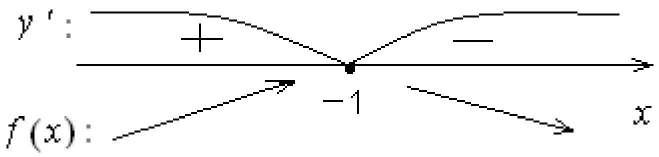
б) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}(x+2)e^{-x} = (\infty\cdot\infty) = \infty \Rightarrow$$

при $x \to -\infty$ наклонной асимптоты нет.

8) $f'(x) = ((x + 2)e^{-x})' = 1\cdot e^{-x} + (x + 2)\cdot(-e^{-x}) = e^{-x}(1 - x - 2) = -(x + 1)e^{-x}$.

$$D(y') = R.$$

$$y' = 0{:}\ -(x+1)e^{-x} = 0 \Rightarrow x = -1,\ f(-1) = 1\cdot e^{1} = e.$$




при $x \in (-\infty;-1)$ $f(x)$ функция возрастает,

при $x \in (-1;+\infty)$ $f(x)$ функция убывает,

при $x = -1$ $f_{\max}(-1) = (-1+2)e^{-(-1)} = e$.

9) $E(f) = (-\infty; e)$, так как

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x+2)e^{-x} = (-\infty\cdot\infty) = -\infty.$$

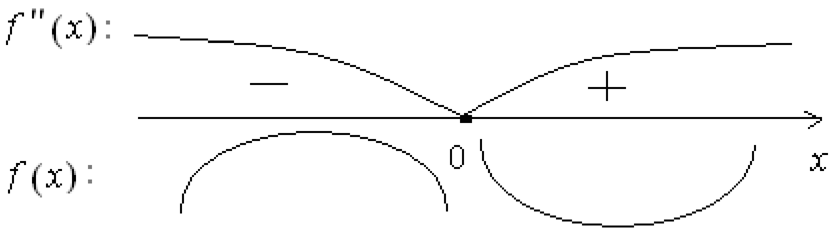
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x+2)e^{-x} = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{e^{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0$$

и $f_{\max}(-1) = e$.

10) $f''(x) = (-(x+1)e^{-x})' = -1e^{-x} + (x+1)e^{-x} = e^{-x}(x+1-1) = xe^{-x}$.

$$D(f'') = R$$

$$f''(x) = 0 : xe^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0,\ f(0) = 2.$$




при $x \in (-\infty;0)$ график функции $f(x)$ выпуклый

при $x \in (0;+\infty)$ график функции $f(x)$ вогнутый

Точка (0;2) является точкой перегиба графика.

11) Результаты наших исследований запишем в таблицу и построим график (рис. 9)

Таблица.

*Результаты исследования функции $y = (x + 2)e^{-x}$*

| $x$ | $(-\infty;-1)$ | $-1$ | $(-1;0)$ | $0$ | $(0;+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| знак $f'(x)$ | + | 0 | – | – | – |
| знак $f''(x)$ | – | – | – | 0 | + |
| $F(x)$ | | $e$ | | 2 | |

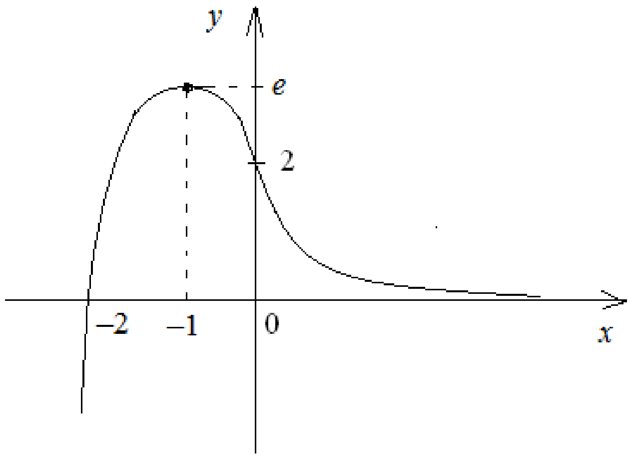



Рис. 5— *График функции $y = (x + 2)e^{-x}$*

**Контрольные вопросы**

1. Сформулируйте непрерывность функции в точке и на промежутке.

2. Сформулируйте теоремы о непрерывных функциях.

3. Какие точки разрыва функции существуют? Покажите их классификацию.

4. Сформулируйте определение производной.

5. Каков механический и геометрический смысл производной?

6.Сформулируйте связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции.

7. Сформулируйте основные правила дифференцирования функций̃.

8. Напишите производные элементарных функций.

9. Напишите производную обратной и сложной функций.

10. Покажите выводы производных обратных тригонометрических функций.

11. Каково правило дифференцирования функции, заданной параметрически?

12. В чем заключается суть логарифмического дифференцирования?

13. Каково правило дифференцирования функции, заданной неявно?

14.Как находится первая производная функция, заданная параметрически?

15. Сформулируйте производные высших порядков функций.

16. Сформулируйте понятие дифференциала функции.

17. Покажите применение дифференциала к приближённым вычислениям.

18. Сформулируйте производные и дифференциалы высших порядков

19. Сформулируйте теоремы о дифференцируемых функциях (т. Ролля, т. Коши, т. Лагранжа).

20. Каков геометрический смысл теоремы Ролля?

21. Каков геометрический смысл теоремы Лагранжа?

22. Каков геометрический смысл теоремы Коши?

23. Сформулируйте правило Лопиталя.

24. Покажите раскрытие неопределённостей различного вида.

25. Сформулируйте необходимое и достаточное условия возрастания и убывания функции.

26. Сформулируйте необходимое и достаточное условия экстремума.

27.Покажите нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

28.Сформулируйте понятие выпуклости и вогнутости графика функции. Точки перегиба.

29. Сформулируйте нахождение вертикальных, наклонных, горизонтальных асимптот.

30. Сформулируйте общую схему исследования функции.

**Примеры к самостоятельному решению**

1. Даны функции и два значения аргумента $x_1$ и $x_2$.

Установить: а) является ли функция непрерывной при значениях данных аргумента $x_1$ и $x_2$; б) односторонние пределы в точках разрыва; в) построить график функции.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $y=\dfrac{2x}{x-1}$; | $x_1=1$; | $x_2=4$. |
| 2. | $y=\dfrac{6x}{x-2}$; | $x_1=2$; | $x_2=6$. |
| 3. | $y=\dfrac{5x}{x+2}$; | $x_1=-2$; | $x_2=2$. |
| 4. | $y=7^{\frac{1}{2-x}}$; | $x_1=2$; | $x_2=0$. |
| 5. | $y=5^{\frac{1}{3-x}}$; | $x_1=3$; | $x_2=1$. |
| 6. | $y=\dfrac{4x}{x+3}$; | $x_1=-3$; | $x_2=0$. |
| 7. | $y=\dfrac{2x}{x+5}$; | $x_1=-5$; | $x_2=5$. |
| 8. | $y=11^{\frac{1}{6-x}}$; | $x_1=6$; | $x_2=5$. |
| 9. | $y=8^{\frac{1}{4-x}}$; | $x_1=4$; | $x_2=3$. |
| 10. | $y=7^{\frac{1}{x}}$; | $x_1=0$; | $x_2=2$. |
| 11. | $y=\dfrac{3x}{x-1}$; | $x_1=1$; | $x_2=4$. |
| 12. | $y=\dfrac{4x}{x-2}$; | $x_1=2$; | $x_2=6$. |
| 13. | $y=\dfrac{4x}{x+2}$; | $x_1=-2$; | $x_2=2$. |
| 14. | $y=9^{\frac{1}{2-x}}$; | $x_1=2$; | $x_2=0$. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 15. | $y=4^{\frac{1}{3-x}};$ | $x_1=3;$ | $x_2=1.$ |
| 17. | $y=\dfrac{2x}{x+3};$ | $x_1=-3;$ | $x_2=0.$ |
| 18. | $y=\dfrac{4x}{x+5};$ | $x_1=-5;$ | $x_2=5.$ |
| 20. | $y=14^{\frac{1}{6-x}};$ | $x_1=6;$ | $x_2=5.$ |
| 21. | $y=3^{\frac{1}{4-x}};$ | $x_1=4;$ | $x_2=3.$ |
| 22. | $y=12^{\frac{1}{x}};$ | $x_1=0;$ | $x_2=2.$ |

2. Найти производные первого порядка данных функций, используя в примере (в) логарифмическую производную и в примере (д) найти производную обратной функции или функции заданной параметрами.

1. а) $y=\dfrac{1}{x+1};$ б) $y = sin(3x + 1);$

в) $y=x^{\sin x};$ г) $2x - 3y + 1 = 0;$

д) найти $x'_x$, если $y = 3x + x^2$.

2. а) $y=\dfrac{x^2-1}{x^3+1};$ б) $y = (1 + 2x^8);$

в) $y=\sqrt{x};$ г) $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1;$

д) $\begin{cases} x=e^{-t} \\ y=e^{2t} \end{cases}.$

3. а) $y=\dfrac{5}{x^2-x+1};$ б) $y = sin(x + sinx);$

в) $y=\dfrac{(x+1)^3\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}};$ г) $x^3+y^3-3axy=0;$

д) найти $x'_y$, если $y = 2x^2 + x$.

4. а) $y=\dfrac{2x^4}{x^2+x+1}$; б) $y = 5cos(2 – 3x)$;

в) $y=(x+1)^2(x-1)^3\sqrt[5]{(x+2)^4}$ ; г) $x^2+y^2=5e^x$ ;

д) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t+1} \\ y=\left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases}$.

5. а) $y=\dfrac{x}{x^2+x^{-2}}$; б) $y = ctg(x\cdot sinx)$;

в) $y=(\sin x)^x$; г) $x^2-5y^2+4xy-1=0$;

д) найти $x'_y$, если $y=x-\dfrac{1}{2}\sin x$.

6. а) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$; б) $y=e^{2x}\cos 2x$;

в) $y=x^{x^2}$; г) $y=\sin(x+2y)$;

д) $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t^3 \end{cases}$.

7. а) $y=\sqrt[3]{x^2}-x\sqrt[4]{x}$; б) $y = tg(3x + 1)^3$;

в) $y=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{3x+5}$; г) $x^2 + y^2 = 1$;

д) найти $x'_y$, если $y==2\cos x-\dfrac{x}{2}$.

8. а) $y=x^2(\sqrt{x}+3)$ б) $y=6^{\arcsin 2x}$;

в) $y=(\sin x)^{\ln x}$; г) $y^2 = 4x$;

д) $\begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=\sqrt[3]{t} \end{cases}$.

9. а) $y=\sqrt[4]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$; б) $y=\dfrac{\cos x}{3\sin^2 x}$;

в) $y = x^x$; г) $x = y + siny$;

д) найти $x'_y$, если $y = x + e^{\frac{x}{2}}$.

10.а) $y = x\left[\sqrt[5]{x^2} - \sqrt[5]{2}\right]$;

б) $y = \ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}}$;

в) $y = (\sin x)^{\cos 2x}$;

г) $x^2 + xy + y^2 = 3$;

д) $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ y = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$.

11.а) $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$;

б) $y = \cos\left(3^x + 3^{-x}\right)$;

в) $y = \dfrac{4x^2}{\sqrt[5]{(2-x)^3}}$;

г) $ye^y - xe^x = y(x-1)$;

д) найти $x'_y$, если $y = 2x^2 + x$.

12.а) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$;

б) $y = \arcsin^2 x$;

в) $y = x^{\cos 2x}$;

г) $e^y + xy = e$;

д) $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{t+2} \\ y = \cos 2t \end{cases}$.

13.а) $y = 8\sqrt{x} + \dfrac{6}{x} + 3$;

б) $y = \cos^2 x + \sin^2 x$;

в) $y = \sqrt[2x]{x}$;

г) $e^{xy} + x^2 + y^3 = 2$;

д) найти $x'_y$, если $y = 2x + e^x$.

14.а) $y = \dfrac{x^{10}+3}{x^{11}+1}$;

б) $y = e^{-x^2}$;

в) $y = x^{25x}$;

г) $\sin(2x+3y) - 2y = 0$;

д) $\begin{cases} x = \cos(t+1) \\ y = \sin(2t+1) \end{cases}$.

15.а) $y=\frac{5-x^2}{5+x^2}$;

б) $y=\ln^3 x$;

в) $y=(x-2)^2\sqrt[3]{(2x-4)^5}$;

г) $2x-5y+10=0$;

д) найти $x'_y$, если $y=\frac{1}{2}\sin 2x$.

16.а) $y=\frac{x}{x^3+y^3}$;

б) $y=\arcsin\sqrt{x}$;

в) $y=(x-2)^3\sqrt[5]{(x+2)^4}$;

г) $x^3+y^3=a^3$;

д) $\begin{cases} x=2\frac{t+1}{1-t} \\ y=tg\frac{t}{2} \end{cases}$.

17.а) $y=\frac{x+1}{x-1}$;

б) $y=\cos^2 x^2$;

в) $y=x^{x^2}$;

г) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$;

д) найти $x'_y$, если $y=\frac{2}{\cos x}$.

18.а) $y=7x^7-\sqrt{2}-\frac{3}{x^7}$;

б) $y=\ln tg\frac{x}{2}$;

в) $y=x^{\sin 3x}$;

г) $y^3=\frac{x-y}{x+y}$;

19.а) $y=\frac{9}{\sqrt[4]{x^9}}+2x^2$;

б) $y=\log_5(x^3-1)$;

в) $y=\frac{(x^2+1)^3(x-2)^4}{\sqrt[5]{(x-1)^2}}$;

г) $e^y=x+y$;

д) найти $x'_y$, если $y=0{,}1x+e^2$.

20.а) $y=\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[3]{x}-1}$;

б) $y=\ln(2x^2+3x+1)$;

в) $y=(x-1)^2\sqrt{(x-2)^3(x^2+1)^4}$;

г) $x^y=y^x$;

д) $\begin{cases} x = \dfrac{t-t^2}{2t+1} \\ y = \ln\dfrac{t-1}{t+1} \end{cases}.$

3.В примерах 1 —10 найти дифференциалы $dy$ данных функций.

1. а) $y=\dfrac{5x+5}{\sqrt{x^2-5x-2}}$; б) $y=3^{\arcsin x}\cdot\sqrt{\cos x}$;
   в) $y=2e^{arctg\,x^3}$; г) $y=5\ln\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$;
   д) $y=(ctg4x)^{\sin 2x}$.
2. а) $y=\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+9x-6}}$; б) $y=6^{\sin x}\cdot\sqrt{\cos 3x}$;
   в) $y=\ln\cos e^{-3x}$; г) $y=\left(x^2+8\right)^{\cos x}$;
   д) $x-y+e^y\cdot arctg\,x=0$.
3. а) $y=10\cdot\sqrt[5]{x^2+x+\dfrac{1}{x}}$; б) $y=4^{\sin 4x}\cdot e^{-2x}$;
   в) $y=\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$; г) $y=(\cos 6x)^x$;
   д) $\ln y = arctg\dfrac{x}{y}$.
4. а) $y=6\sqrt{4x+3}\cdot\arcsin 2x$; б) $y=\left(e^{\cos x}+1\right)^2$;
   в) $y=\ln\sin(6x+11)$; г) $y=(tg\,x)^{5x}$;
   д) $tg\dfrac{y}{x}=5x$.
5. а) $y=\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+4x-3}}$; б) $y=5^{\cos x}\cdot arctg\,2x$;
   в) $y=9^{arctg\,x}\cdot\ln\left(1+x^2\right)$; г) $y=(tg\,3x)^{x^3}$;
   д) $y\cdot\sin x=\cos(x-y)$.
6. а) $y=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{2x+4}}$; б) $y=4^{\sin x}\cdot arctg\,2x$;
   в) $y=\ln\sqrt{\dfrac{2x}{x+1}}$; г) $y=(7x+\ln x)^x$;
   д) $x^2+y^2-7xy=0$.
7. а) $y=\dfrac{4x+6}{\sqrt{x^3+2x+1}}$; б) $y=6^{tg\,3x}\cdot\cos^2 4x$;

в) $y=\ln\arcsin 6x$;     г) $y=\left(x+5\right)^{\sin x}$;

д) $2x^3+y^2+4e^y=x$.

8. а) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+4x-5}}{e^{x^2}}$;     б) $y=\sqrt[4]{\sin x}\cdot\cos\left(x^2+2\right)$;

в) $y=tg^4 8x$;     г) $y=\left(\cos 6x\right)^{x^3}$;

д) $y\cdot\cos x=2\sin\left(x-y\right)$.

9. а) $y=\dfrac{2x+1}{\sqrt[3]{x^3+6x+5}}$;     б) $y=5^{tg\,x}\cdot\arcsin 9x$;

в) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{x}{x+2}}$;     г) $y=\left(4\arcsin x\right)^{x^2}$;

д) $e^x+e^y+x^3+y^3=0$.

10. а) $y=\dfrac{3x-3}{\sqrt[3]{x^2+9x+1}}$;     б) $y=\ln\left(1+x^3\right)\cdot 5^{\cos x}$;

в) $y=5\ln\sqrt{\dfrac{x^2+4}{x^2-4}}$;     г) $y=\left(\sin 4x\right)^{tg\,x}$;

д) $x^2\cdot y^5+e^x+e^y=5$.

4. Пользуясь правилом Лопиталя, вычислить указанный предел.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(tgx\right)^x$.     2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.     3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin 2x\right)^{\cos x}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln x\right)^{\frac{1}{x}}$.     5. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{3}{1+\ln x}}$.     6. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5+1}{x^3+1}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 3x}$.     8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x-2x}{x^3}$.     9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-3x}-e^{\sin x}}{x}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.     11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^x}{x^2}$.     12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ctgx}{\ln 2x}$.

13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^a}$.     14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln tg2x}{\ln tgx}$.     15. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{\ln x}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.     17. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{x^2 2}\right)$.     18. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{10}}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$.     20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,\dfrac{2x}{3}}{\sin 4x}$.     21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-2x^2+1}{x^2-2}$

1. $\lim\limits_{x\to 0}(tgx)^x$.    2. $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}$.    3. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin 2x)^{\cos x}$.

4. $\lim\limits_{x\to \infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$.    5. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{3}{1+\ln x}}$.    6. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^5+1}{x^3+1}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 3x}$.    8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x-2x}{x^3}$.    9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-3x}-e^{\sin x}}{x}$.

10. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\ln x}{x}$.    11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^x}{x^2}$.    12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ctgx}{\ln 2x}$.

13. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^a}$.    14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln tg2x}{\ln tgx}$.    15. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2e^{-x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{\ln x}-\frac{1}{\ln x}\right)$.    17. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x^2 2}\right)$.    18. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^{10}}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$.    20. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,\frac{2x}{3}}{\sin 4x}$.    21. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x-2x^2+1}{x^2-2}$

5. Используя общую схему исследования и построения графика функции, построить следующие кривые:

1. $y=\frac{x^2}{x-1}$.    2. $y=\frac{x}{x^2-1}$.    3. $y=x+\frac{6}{x+3}$.

4. $y=x^2+\frac{2}{x}$.    5. $y=x+\frac{1}{x}$.    6. $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

7. $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$    8. $y=\frac{x}{x^2-4}$. .    9. $y=2x^4-x^2$.

10. $y=\frac{9}{x^2-9}$    11. $y=\frac{2x}{x^2-1}$.    12. $y=\frac{x-1}{x^2-4}$.

13. $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$.    14. $y=x^2+\frac{2}{x}$.    15. $y=\frac{8}{x^2-4}$.

16. $y=\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}$.    17. $y=\frac{x^2}{x-1}$.    18. $y=\frac{2x}{x+3}$;

19. $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$.    20. $y=\frac{3x}{x^2-1}$.    21. $y=x+\frac{4}{x+2}$.

22. $y=\dfrac{4x}{x^2+4}$. 23. $y=\dfrac{4x^2}{x^2-1}$. 24. $y=\dfrac{8x}{(x-2)^2}$.

25. $y=x-\ln(x+2)$. 26. $y=\dfrac{2x^2}{2x-1}$. 27. $y=x\cdot e^{-x^2}$..

28. $y=\dfrac{x^2-x+2}{x-1}$. 29. $y=\dfrac{5x}{x^2-1}$. 30. $y=x+\dfrac{1}{x+2}$.

## Контрольная работа

### Вариант—1

*Задание 1*. Найти производные заданных функций.

а) $f(x)=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}-\sqrt[3]{x}\right)^3$; б) $f(x)=3^{\cos 2x}tg^2 2x$;

в) $f(x)=\lg\sqrt{\dfrac{3x+1}{3x-1}}$; г) $f(x)=2arctg(5x^3-2)$.

*Задание 2*. С помощью дифференциала найти приближенное значение выражения $\sqrt[4]{81{,}3}$.

*Задание 3*. Исследовать средствами дифференциального исчисления функцию $f(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$ и построить ее график.

### Вариант—2

*Задание 1*. Найти производные заданных функций.

а) $f(x)=\left(x^2-\dfrac{1}{x^3}+4\sqrt[3]{x}\right)^4$; б) $f(x)=2x^3ctg^2 4x$;

в) $f(x)=\lg\sqrt{\dfrac{3x+1}{3x-1}}$; г) $f(x)=3\arcsin^2\dfrac{1}{x-1}$.

*Задание 2*. С помощью дифференциала найти приближенное значение выражения $\sqrt[3]{124{,}9}$.

*Задание 3*. Исследовать средствами дифференциального исчисления функцию $f(x)=\dfrac{x}{x+4}$ и построить ее график.

## Вариант—3

*Задание 1.* Найти производные заданных функций.

а) $f(x)=\left(\dfrac{1}{x^3}-x^2+\sqrt[3]{x^{-2}}\right)^4$; б) $f(x)=e^{2x}\cos^2 2x$;

в) $f(x)=\lg\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$; г) $f(x)=2(x^2+4)\arcsin^3 4x$.

*Задание 2.* С помощью дифференциала найти приближенное значение выражения $\sqrt{50}$.

*Задание 3.* Исследовать средствами дифференциального исчисления функцию $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$ и построить ее график.

## Вариант—4

*Задание 1.* Найти производные заданных функций.

а) $f(x)=\left(x^3-\dfrac{1}{\sqrt{x^5}}-5x\right)^2$; б) $f(x)=x^2\,2^{arctg 3x}$;

в) $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1-3x^2}{3+x^2}}$; г) $f(x)=tgx^2\arcsin^2 2x$.

*Задание 2.* С помощью дифференциала найти приближенное значение выражения $\sqrt{24{,}9}$.

*Задание 3.* Исследовать средствами дифференциального исчисления функцию $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2$ и построить ее график.

## Вариант—5

*Задание 1.* Найти производные заданных функций.

а) $f(x)=\left(2x^4-\frac{3}{\sqrt{x^3}}-x^2\right)^3$; б) $f(x)=arctg\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$;

в) $f(x)=2^{\arcsin 3x}\cos x$; г) $f(x)=2^{x+1}\log_2(3x-2)$.

*Задание 2*. С помощью дифференциала найти приближенное значение выражения $\sin 28^0$.

*Задание 3*. Исследовать средствами дифференциального исчисления функцию $f(x)=x^4+x^2$ и построить ее график.

## Вариант—6

*Задание 1*. Найти производные заданных функций.

а) $f(x)=\ln\sqrt[5]{\frac{x^3-1}{x^3+1}}$; б) $f(x)=3arcctg^2(3x^2-1)$;

в) $f(x)=(x^2+e^x-3)^3$; г) $f(x)=3^{\sin 2x}tg2x$.

*Задание 2*. С помощью дифференциала найти приближенное значение выражения $\cos 44^0$.

*Задание 3*. Исследовать средствами дифференциального исчисления функцию $f(x)=\frac{3}{x^2-4}$ и построить ее график.

## Вариант—7

*Задание 1*. Найти производные заданных функций.

а) $f(x)=\cos(x^2-2)$; б) $f(x)=2arctg^3(x+5)$;

в) $f(x)=(x^2-\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}+1)^4$; г) $f(x)=\sin 3xtg^2 2x$.

*Задание 2*. С помощью дифференциала найти приближенное значение выражения $tg46^0$.

*Задание 3*. Исследовать средствами дифференциального исчисления функцию $f(x)=2x^2+\frac{1}{4}x^4$ и построить ее график.

## Вариант—8

*Задание 1*. Найти производные заданных функций.

а) $f(x)=\lg\sqrt[5]{\dfrac{3x-5}{3x+5}}$; б) $f(x)=(\sqrt{x^3}-\dfrac{1}{x}+\sqrt[3]{x^2})^4$;

в) $f(x)=2\arccos^3(x-3)$; г) $f(x)=e^{\cos 2x}tg^2 3x$.

*Задание 2*. С помощью дифференциала найти приближенное значение выражения $\sin 29^0$.

*Задание 3*. Исследовать средствами дифференциального исчисления функцию $f(x)=x^3-x^2-x$ и построить ее график.

## Вариант—9

*Задание 1*. Найти производные заданных функций.

а) $f(x)=\lg\sqrt[5]{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$; б) $f(x)=(3x^2+\dfrac{3}{x}-\sqrt[3]{2x^2})^3$;

в) $f(x)=2\arcsin^3(x^2+2x)$; г) $f(x)=4^{\cos x}\sin^3 2x$.

*Задание 2*. С помощью дифференциала найти приближенное значение выражения $\sqrt[3]{27{,}2}$.

*Задание 3*. Исследовать средствами дифференциального исчисления функцию $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+3x$ и построить ее график.

## Вариант—10

*Задание 1*. Найти производные заданных функций.

а) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{2x-2}{4x+2}}$; б) $f(x)=(2x^4+x^2-4\sqrt[3]{x^2})^3$;

в) $f(x)=arctg^2(3x+6)$; г) $f(x)=e^{x+3}\cos^2(2x-3)$.

*Задание 2*. С помощью дифференциала найти приближенное значение выражения $\sqrt{35{,}7}$.

*Задание 3*. Исследовать средствами дифференциального исчисления функцию $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-1}$ и построить ее график.