ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ГОРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

ИНТЕГРАЛЫ

Учебно- методическое пособие
для обучающихся по образовательным
программам среднего профессионального
образования

Владикавказ 2023

УДК 517
ББК 22.161.1

Составители:
Ахполова З.А., Кокоева З.Т., Дзарахохов А.В.

Рецензенты:
Бароев Т.Р. – доктор технических наук, профессор.
Худалов М.З. - кандидат физико-математических наук, доцент.

Математика. Интегралы: учебно- методическое пособие / Составители: З.А. Ахполова, З.Т. Кокоева, А.В. Дзарахохов. – Владикавказ: ФГБОУ ВО Горский ГАУ, 2023.- 98с.

Каждый параграф содержит краткое изложение теоретических вопросов, необходимых для решения последующих задач, а также достаточно большое количество решенных примеров и задач. В пособии подобраны задания для аудиторных занятий и самостоятельной (внеаудиторной) работы студентов. В пособии имеются задания для контрольной работы, которые можно использовать и для типового расчета. Предназначено для обучающихся по образовательным программам среднего профессионального образования

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем пособии кратко, но доступно излагается материал по рядам, входящий в программу по высшей математике для студентов нетехнических вузов. В нем указано, в какой последовательности надо изучать рекомендуемую литературу, какие задачи необходимо решать. Каждый раздел содержит основной теоретический материал, примеры с краткими методическими указаниями и решениями, а также задачи, которые рекомендуются к самостоятельному решению.

Так как в результате изучения дисциплины математика студент должен овладеть следующими компетенциями:

– владеть культурой мышления, быть способным к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения (ОК-1);
– уметь логически верно, аргументировано и ясно строить устную и письменную речь, быть способным в письменной и устной речи правильно (логически) оформить результаты мышления (ОК-2);
– стремиться к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства, приобретать новые знания в области техники и технологии, математики, естественных, гуманитарных, социальных и экономических наук (ОК-7)
– быть способным и готовым использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ПК-1)
– владение культурой мышления, знание его общих законов, способность в письменной и устной речи логически правильно оформить его результаты (ОК-3);
– способность и готовность приобретать с большой степенью самостоятельности новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии (ОК-4);
– способность применять математический аппарат, необходимый для осуществления профессиональной деятельности (ОК-15)

ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Первообразная функция и её свойства

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если в каждой точке этого промежутка функция $F(x)$ дифференцируема и выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Пример 1. Функция $F(x) = \sin x$ является первообразной функции $f(x) = \cos x$ на бесконечном промежутке $(-\infty; +\infty)$, так как

$$F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x) \text{ для } x \in (-\infty;+\infty).$$

Нетрудно убедиться, что функции $F_1(x) = \sin x + 3$ и $F_2(x) = \sin x - 7$ также являются первообразными функции $f(x) = \cos x$ для всех $x \in (-\infty;+\infty)$, т.е. если для функции $f(x)$ на некотором промежутке существует первообразная функции, то она не является единственной.

Множество всех первообразных для данной функции $f(x)$ есть множество, которое задаётся формулой $F(x) + C$, где C – любая постоянная величина.

Теорема 1 (об общем виде первообразной). Если $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$. Тогда множество всех первообразных для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$ будут представлены в виде $F(x) + C$, где C – const..

***F*(*x*) + *C*,** где C – const.Такая форма записи первообразной называется общи вида первообразной.

2. Понятие неопределённого интеграла

Определение 2. Множество всех первообразных для данной функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$ называется неопределённым интегралом функции $f(x)$ на этом интервале и обозначается символом:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

В обозначении $\int f(x)\mathrm{d}x$ знак $\int$ называется знаком интеграла, $f(x)\mathrm{d}x$ – подынтегральным выражением, $f(x)$ – подынтегральной функцией, x – переменной интегрирования. **[3]**

Теорема 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $(a;b)$, то она имеет на промежутке $(a;b)$ первообразную и неопределённый интеграл.

Замечание. Операция нахождения неопределённого интеграла от данной функции $f(x)$ на некотором промежутке носит название интегрирования функции $f(x)$.

Действие интегрирования является обратным действию дифференцирования.

3. Свойства неопределённого интеграла

Из определении первообразной $F(x)$ и неопределённого интеграла от данной функции $f(x)$ на некотором промежутке, следуют свойства:

1. $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$.
2. $\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = f(x)\mathrm{d}x$.
3. $\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.
4. $\int k \cdot f(x)\mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\mathrm{d}x$, где k = const.
5. $\int \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)\mathrm{d}x = \int f_1(x)\mathrm{d}x \pm \int f_2(x)\mathrm{d}x$

Замечание. Все свойства верны при условии, что интегралы, фигурирующие в них, рассматриваются на одном и том же промежутке и существуют.

4. Таблица основных неопределённых интегралов

1. $\int 0 \cdot \mathrm{d}x = C$.
2. $\int \mathrm{d}x = x + C$.
3. $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$.

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

6. $\int e^x dx = e^x + C$.

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, a > 0,\ -a < x < a$.

15. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, a > 0; x \neq \pm a$.

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$.

где C – произвольная постоянная.

Замечание. Интеграл, взятый не от любой элементарной функции, является элементарной функцией. Примерами могут служить следующие интегралы, часто встречающиеся в задачах:

$\int e^{-x^2} dx$ – интеграл Пуассона,

$\int \cos x^2 dx, \int \sin x^2 dx$ – интегралы Френеля,

$\int \frac{dx}{\ln x} (0 < x \neq 1)$ – интегральный логарифм,

$\int \frac{\cos x}{x} dx, \int \frac{\sin x}{x} dx \quad (x \neq 0)$ – интегральный косинус и синус.

§ 2. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1. Непосредственное интегрирование

а) Работа с таблицей: предложенный интеграл оказался одним из табличных интегралов.

Пример 1.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} + C$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \ln\left| x + \sqrt{4+x^2} \right| + C$

б) Метод разложения: предложенный интеграл после применения линейных свойств (4) и (5) неопределённого интеграла меняется на алгебраическую сумму табличных интегралов.

Пример 2.

$$\int \left(7\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} \right) dx = 7 \cdot \int \sqrt[3]{x^2} dx - 2 \cdot \int \frac{dx}{x} + 4 \cdot \int \frac{dx}{x^2} =$$

$$= 7 \cdot \int x^{\frac{2}{3}} dx - 2\ln|x| + 4 \cdot \int x^{-2} dx = 7 \cdot \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - 2\ln|x| + 4 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C =$$

$$= \frac{21}{5}\sqrt[3]{x^5} - 2\ln|x| - \frac{4}{x} + C$$

Ответ: $\int \left(7\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} \right) = \frac{21}{5}\sqrt[3]{x^5} - 2\ln|x| - \frac{4}{x} + C$.

Пример 3.

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx - \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C$$

Ответ: $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C$.

Пример 4.

$$\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1-\cos x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + C$$

Ответ: $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + C$

в) Подведение под знак дифференциала: предложенный интеграл удается свести к табличному интегралу с помощью изменения переменой интегрирования или за счёт преобразований под знаком дифференциала. При этом используют следующие формулы:

$$d(\varphi(x)) = \varphi'(x)dx;$$

$$\frac{dx}{x} = d(\ln x);\ \frac{dx}{x^2} = -d(\frac{1}{x});\ d(\sin x) = \cos x dx;$$

$$d(\cos x) = -\sin x dx;\ \frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x);\ \frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x);$$

$dx = \frac{1}{a}d(ax+b);\ xdx = \frac{1}{2}d(x^2)$ и т.д.

Далее равенство справедливо для любой дифференцируемой функции $u = \varphi(x)$.

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

Пример 5.

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$$

Ответ: $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C$.

Пример 6.

$$\int (2x-7)^{10}dx = \frac{1}{2}\int (2x-7)^{10}\cdot d(2x-7) = \frac{1}{2}\frac{(2x-7)^{11}}{11} + C = \frac{1}{22}(2x-7)^{11} + C$$
.

Ответ: $\int (2x-7)^{10} = \frac{1}{22}(2x-7)^{11} + C$.

Пример 7.

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{9-x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{3^2-(x^2)^2}} = \frac{1}{2}\cdot \arcsin\frac{x^2}{3} + C.$$

Ответ: $\int \frac{x dx}{\sqrt{9-x^4}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{3} + C$.

Пример 8.

$$\int \frac{e^x dx}{7-5e^x} = -\frac{1}{5}\int \frac{d(7-5e^x)}{7-5e^x} = -\frac{1}{5}\ln|7-5e^x| + C.$$

Ответ: $\int \frac{x dx}{\sqrt{9-x^4}} = -\frac{1}{5}\ln|7-5e^x| + C$.

Пример 9.

$$\int \frac{dx}{x(\ln^2 x+1)} = \int \frac{d\ln x}{\ln^2 x+1} = \operatorname{arctg}(\ln x) + C.$$

Ответ: $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x+1)} = \operatorname{arctg}(\ln x) + C$.

2. Интегрирование подстановкой

При подстановке (или замена переменной) пользуемся следующим правилом.

Если не удаётся найти интеграл $f(x)$ непосредственно, то можно выбрать такую функцию $x = \varphi(t)$, удовлетворяющую условиям:

1) $\varphi(t)$ непрерывна при $t \in (\alpha;\beta)$, соответствующем интервалу $x \in (a;b)$,
2) дифференцируемая при $t \in (\alpha;\beta)$;
3) имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$,

чтобы

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\ ,\quad t = \varphi^{-1}(x)$$

стал табличным или более простым. Иногда для упрощения интеграла можно сделать замену $t = \psi(x)$. **[4]**

Пример 10.

$$\int \frac{dx}{4+9x^2} = \int \frac{dx}{2^2+(3x)^2} = \left[\begin{matrix}\text{Замена}\\ t = 3x\\ x = \frac{t}{3}; dx = \frac{dt}{3}\end{matrix}\right] = \int \frac{\frac{dt}{3}}{2^2+t^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{2^2+t^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3x}{2} + C.$$

Ответ: $\int \frac{dx}{4+9x^2} = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3x}{2} + C$.

Пример 11.

$$\int x\sqrt{x+1}dx = \left[\begin{matrix}\text{Замена}\\ \sqrt{x+1} = t; dx = 2tdt\\ x = t^2-1\end{matrix}\right] = \int (t^2-1)t\cdot 2tdt = 2\int (t^4-t^2)dt =$$

$$=2\int t^4 dt-2\int t^2 dt=\frac{2t^5}{5}-2\cdot\frac{t^3}{3}+C=\frac{2(\sqrt{x+1})^5}{5}-\frac{2(\sqrt{x+1})^3}{3}+C.$$

Ответ: $\int x\sqrt{x+1}dx=\frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5}-\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}+C$.

Пример 12.

$$\int\frac{e^{2x}}{e^{4x}-5}dx=\left[\begin{array}{c}\text{Замена}\\ e^{2x}=t;\\ 2e^{2x}dx=dt; e^{2x}dx=\frac{dt}{2}\end{array}\right]=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{5}}{t+\sqrt{5}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{e^{2x}-\sqrt{5}}{e^{2x}+\sqrt{5}}\right|+C.$$

Ответ: $\int\frac{e^{2x}}{e^{4x}-5}dx=\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{e^{2x}-\sqrt{5}}{e^{2x}+\sqrt{5}}\right|+C$.

Пример 13.

$$\int\sqrt{9-x^2}dx=\left|\begin{array}{c}\text{Замена}\\ x=3\sin t\Rightarrow t=\arcsin\frac{x}{3}\\ dx=3\cos t dt\end{array}\right|=\int\sqrt{9-9\sin^2 t}\cdot 3\cos t dt=$$

$$=\int 3\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot 3\cos t dt=9\int\cos t\cdot\cos t dt=9\int\cos^2 t dt=9\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=\frac{9}{2}\int dt+\frac{9}{2}\int\cos 2t dt=\frac{9}{2}t+\frac{9}{4}\int\cos 2t d(2t)=\frac{9}{2}t+\frac{9}{4}\sin 2t+C=$$

$$=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{9}{2}\sin t\cdot\cos t+C=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{9}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}+C=$$

$$=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{3}{2}x\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}+C=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{x\sqrt{9-x^2}}{2}+C.$$

Ответ: $\int\sqrt{9-x^2}dx=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{x\sqrt{9-x^2}}{2}+C$.

3. Интегрирование по частям

Функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ дифференцируемы на некотором интервале $(a;b)$. И на интервале $(a;b)$ функция $v(x)\cdot u'(x)$ имеет первообразную. Тогда на интервале $(a;b)$ функция $u(x)\cdot v'(x)$ также имеет первообразную. При этом справедливо равенство:

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)dx.$$

или

$$\int u dv=u\cdot v-\int v\cdot du.$$

Последнее соотношение называется формулой интегрирование по частям.

Замечание: Для вычисления интеграла необходимо разбить подынтегральное выражение на два множителя $u(x)$ и $dv(x)$ так, чтобы интеграл $\int v\cdot du$ оказался легко интегрируемым.

Типы интегралов для которых применима формула интегрирования по частям, может быть разбита на следующие три группы.

1.Интегралы вида $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin(ax)dx$, $\int P(x)\cos(ax)dx$, где $P(x)-$ многочлен, $a-$ число, $a\neq 0$. Удобно положить $u=P(x)$, а за dv обозначить все остальные сомножители подынтегрального выражения, то есть

$$dv=\begin{cases} e^{ax}dx, \\ \sin(ax)dx, \\ \cos(ax)dx. \end{cases}$$

В данном случае формула $\int u\mathrm{d}v=u\cdot v-\int v\cdot \mathrm{d}u$ применяется столько раз, какова степень многочлена $P(x)$.

2. Интегралы вида $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x) arccos\ x dx$, $\int P(x) arctg x dx$, $\int P(x) arcctg x dx$, $\int P(x) ln\, x dx$. В таких интегралах удобно положить $dv=P(x)dx,$ а за u обозначить остальные сомножители, то есть

$$u=\begin{cases} \arcsin\, x, \\ \arccos\, x, \\ arctgx, \\ arcctgx, \\ \ln x. \end{cases}$$

3. Интегралы вида $\int e^{ax}\cdot sin(bx)dx, \int e^{ax}\cdot\cos(bx)dx,$ где a и b – числа. В таком случае за u можно принять функцию $u=e^{ax}$ или $u=\sin(bx)\,(\mathrm{u}=\cos(\mathrm{bx}))$. Формула интегрирования по частям будет применяться два раза. В повторном интегрировании по частям за u необходимо принять аналогичную в первом применении функцию. В таком случае получается уравнение относительно данного по условию интеграла, из которого легко найти этот интеграл. При неудачном выборе u и dv в повторном интегрировании получается бесполезное тождество. **[3]**

Пример 14.

$$\int x^2\cdot \mathrm{arctg}x\mathrm{d}x=\left[\begin{matrix} u=\mathrm{arctg}x;\ \mathrm{d}v=x^2\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2};\ v=\dfrac{x^3}{3}\end{matrix}\right]=\frac{x^3}{3}\mathrm{arctg}x-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=$$

$$=\frac{x^3}{3}\mathrm{arctg}x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{r} -\ x^3 \\ x^3+x \\ \hline -x \end{array} & \dfrac{x^2+1}{x} \end{array}\right]=\frac{x^3}{3}\mathrm{arctg}x-\frac{1}{3}\int\Big(x-\frac{x}{x^2+1}$$

$$=\frac{x^3}{3}\mathrm{arctg}x-\frac{1}{3}\int x\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+1}=\frac{x^3}{3}\mathrm{arctg}x-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1}=$$

$$=\frac{x^3}{3}\mathrm{arctg}x-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{6}\ln|x^2+1|+C$$

Ответ: $\int x^2\cdot\mathrm{arctg}x\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}\mathrm{arctg}x-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{1}{6}\ln|x^2+1|+C$

Пример 15.

$$\int x^3\ln x\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} u=\ln x \\ \mathrm{d}x=x^3\mathrm{d}x \end{matrix} & \begin{matrix} \mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x} \\ v=\dfrac{x^4}{4}\end{matrix}\end{array}\right]=\frac{x^4}{4}\ln x-\int\frac{x^4}{4}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{1}{4}\int x^3\mathrm{d}$$

$$=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{x^4}{16}+C.$$

Ответ: $\int x^3\ln x\mathrm{d}x=\dfrac{x^4}{4}\ln x-\dfrac{x^4}{16}+C.$

Пример 16.

$$\int x\cdot\sin x\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{c|c} u=x & \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x=\sin x\mathrm{d}x & v=-\cos x\end{array}\right]=-x\cos x+\int\cos x\mathrm{d}x=-x\cos x+\sin x+C.$$

Ответ: $\int x\cdot\sin x\mathrm{d}x=-x\cos x+\sin x+C.$

Пример 17.

$$\int x^2\cdot e^x\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{c|c} u=x^2 & \mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=e^x\mathrm{d}x & v=e^x\end{array}\right]=x^2\cdot e^x-\int 2x\cdot e^x\mathrm{d}x=x^2e^x-2\int xe^x\mathrm{d}x=$$

$$=\left[\begin{array}{c|c} u=x & \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=e^x\mathrm{d}x & v=e^x\end{array}\right]=x^2e^x-2(xe^x-\int e^x\mathrm{d}x)=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C.$$

Ответ: $\int x^2\cdot e^x\mathrm{d}x=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C.$

Пример 18.

$$\int e^x\cos 2x\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{c|c} u=e^x & \mathrm{d}u=e^x\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=\cos 2x\mathrm{d}x & v=\frac{1}{2}\sin 2x\end{array}\right]=\frac{1}{2}e^x\sin 2x-\frac{1}{2}\int e^x\sin 2x\mathrm{d}x=$$

$$=\left[\begin{array}{c|c} u=e^x & \mathrm{d}u=e^x dx \\ \mathrm{d}v=\sin 2x\mathrm{d}x & v=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{array}\right]=\frac{1}{2}e^x\sin 2x-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^x\cos 2x+\frac{1}{2}\int e^x\cos 2x\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{2}e^x\sin 2x+\frac{1}{4}e^x\cos 2x-\frac{1}{4}\int e^x\cos 2x\mathrm{d}x$$

Далее необходимо решить уравнение:

$$\int e^x\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^x\sin 2x+\frac{1}{4}e^x\cos 2x-\frac{1}{4}\int e^x\cos 2x\mathrm{d}x.$$

Пусть $\int e^x\cos 2x\mathrm{d}x=J$, тогда уравнение запишется в виде:

$$J=\frac{1}{2}e^x\sin 2x+\frac{1}{4}e^x\cos 2x-\frac{1}{4}J\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{5}{4}J=\frac{1}{2}e^x\sin 2x+\frac{1}{4}e^x\cos 2x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow J=\frac{1}{5}(2\sin 2x+\cos 2x)e^x.$$

Ответ: $\int e^x\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{5}(2\sin 2x+\cos 2x)e^x+C$

Пример 19.

$$\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{c|c} u=\cos(\ln x) & \mathrm{d}u=-\frac{\sin(\ln x)}{x}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x & v=x\end{array}\right]=x\cdot\cos(\ln x)+\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x=$$

$$=\left[\begin{array}{c|c} u=\sin(\ln x) & \mathrm{d}u=\frac{\cos(\ln x)}{x}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x & v=x\end{array}\right]=x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x$$

.

Пусть $\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x=J$, тогда получаем уравнение вида:

$$J=x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)-J$$

$$2J=x(\cos(\ln x)+\sin(\ln x))$$

$$J=\frac{x}{2}(\cos(\ln x)+\sin(\ln x)).$$

Ответ: $\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x=\frac{x}{2}(\cos(\ln x)+\sin(\ln x))+C$.

4. Интегрирование рациональных дробей

4.1. Разложение рациональной дроби на сумму простых дробей

Определение 1. Рациональной дробью называется отношение двух многочленов:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{c_0x^m+c_1x^{m-1}+\ldots+c_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}$$

Определение 2. Рациональная дробь называется правильной, если $m<n$. В противном случае (если $m\geq n$) она называется неправильной.

Определение 3. Простыми рациональными дробями называются дроби следующих четырех типов:

I. $\dfrac{A}{x-a}$ $(A,a=const,A,a\in R)$,

II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ $(A,a,k=const,A,a\in R,k\in N,k\geq 2)$,

III.

$\dfrac{Mx+F}{x^2+px+q}$ $(M,F,p,q=const,p^2-4q<0,M,F,p,q\in R)$,

IV.

$\dfrac{Mx+F}{(x^2+px+q)^k}$ $(M,F,p,q,k=const,p^2-4q<0,M,f,p,q\in R,k\in N,k\geq 2)$

Теорема 3. Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы целой части (многочлена) и правильной рациональной дроби.

Пример 20. Представить дробь $\dfrac{x^4-2x^2+5}{x^2+1}$ в виде суммы целой части и правильной рациональной дроби.

Так как высшая степень числителя равна 4, а знаменателя – 2, то данная дробь неправильная (4 > 2). Разделим числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} x^4-2x^2+5 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -\;\; x^4+x^2 & x^2-3 \\ \cline{1-1} -3x^2+5 & \\ -\;\; -3x^2-3 & \\ \cline{1-1} 8 & \end{array}$$

Следовательно, дробь можно записать в виде:

$$\frac{x^4-2x^2+5}{x^2+1}=(x^2-3)+\frac{8}{x^2+1}.$$

Ответ: $\dfrac{x^4-2x^2+5}{x^2+1}=(x^2-3)+\dfrac{8}{x^2+1}$.

Теорема 4. Любую правильную рациональную дробь можно единственным образом представить в виде суммы конечного числа простых рациональных дробей.

Разложение правильной рациональной дроби $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ ($m<n$) на сумму простых дробей можно выполнить по следующей схеме:

Найти корни многочлена $Q_n(x)$ и представить его в виде произведения простых множителей:

$$Q_n(x)=b_0(x-a_1)^{ki_1}\ldots.(x-a_r)^{k_r}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\ldots.\to(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$$

,

где $a_i\neq a_j$, $1\leq i,j\leq r$

$$p_i^{\,2}-4q_i<0,\ (p_i;q_i)\neq(p_i;q_j)\,,\ 1\le i;\ \ j\le S$$

$k_i \in N$, $1\le i\le r$

$l_i \in N$, $1\le i\le S$

Записать разложение дроби с неопределёнными коэффициентами:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}}+\ldots+\frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)}+\ldots+\frac{A_{r1}}{(x-a_r)^{k_2}}+\ldots+\frac{A_{rk_r}}{(x-a_r)}+\frac{M_{11}x+F_{11}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}+$$

$$+\frac{M_{1l_1}x+F_{1l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)}+\ldots+\frac{M_{s1}x+F_{s1}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}+\ldots+\frac{M_{sl_s}x+F_{sl_s}}{(x^2+p_sx+q_s)}$$

Определить коэффициенты

$$A_{11},..A_{rk_2},M_{11},..M_{sl_s},F_{11},..F_{sl_s}$$

Суммарное число которых равно *n*, методом неопределенных коэффициентов.

Для этого необходимо всё разложение привести к общему знаменателю и приравнять числитель полученной дроби к $P_m(x)$. Приравнивая в этих многочленах коэффициенты при одинаковых степенях *x*, получим систему из *n* линейных уравнений с *n* неизвестными. Эта система имеет единственное решение – искомые коэффициенты.

Пример 21. Разложить дробь $\dfrac{43x^2-5x-14}{x^3+x^2-2x}$ на сумму простых дробей.

1) Данная дробь правильная. Разложим знаменатель на множители:

$$x^3+x^2-2x=x(x^2+x-2)=x(x-1)(x+2)\,.$$

2) Запишем разложение данной дроби на сумму простых дробей:

$$\frac{43x^2-5x-14}{x^3+x^2-2x}=\frac{43x^2-5x-14}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

3) Для нахождения коэффициентов *A*, *B* и *C* приводим разложение дроби к общему знаменателю и приравняем числители дробей.

$$A(x^2+x-2)+B(x^2+2x)+C(x^2-x)=43x^2-5x-14$$

$$x^2(A+B+C)+x(A+2B-C)+(-2A)=43x^2-5x-14$$

$$\begin{array}{l} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array}\left\{\begin{array}{l} A+B+C=43 \\ A+2B-C=-5 \\ -2A=-14 \end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} B+C=36 \\ 2B-C=-12 \\ A=7 \end{array}\right.\Rightarrow\begin{array}{l} 3B=24\Rightarrow B=8 \\ C=36-8\Rightarrow C=28 \end{array}$$

Следовательно, дробь можно записать в виде:

$$\frac{43x^2-5x-14}{x^3+x^2-2x}=\frac{7}{x}+\frac{8}{x-1}+\frac{28}{x+2}\,.$$

Ответ: $\dfrac{43x^2-5x-14}{x^3+x^2-2x}=\dfrac{7}{x}+\dfrac{8}{x-1}+\dfrac{28}{x+2}$.

4.2. Интегрирование простых дробей

Задача интегрирования рациональной дроби сводится к умению интегрирования только правильных рациональных дробей, так как интегрирование целой части дроби (многочлена) – задача не сложная. Если решена задача разложения правильной дроби на сумму простых дробей, то дальше надо уметь интегрировать простые дроби. Покажем, как интегрировать простые дроби (четыре типа). **[2]**

I тип. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}\mathrm{d}x=A\int\frac{\mathrm{d}(x-a)}{x-a}=A\cdot\ln|x-a|+C$

II тип.

$$\int\frac{A}{(x-a)^k}\mathrm{d}x=A\int\frac{\mathrm{d}(x-a)}{(x-a)^k}=A\int(x-a)^{-k}\mathrm{d}(x-a)=\frac{A(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C=\frac{-A}{(k-1)(x-a)^{k-1}}+C$$

$(k \in N, k \geq 2)$

III тип. $\int \frac{Mx+F}{X^2+px+q}\mathrm{d}x = \int \frac{Mx+F}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \text{Замена} \\ x+\frac{p}{2}=t \\ x=t-\frac{p}{2}; \mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{bmatrix} =$

$$= \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+F}{t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}\mathrm{d}t = \int \frac{Mt}{t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}\mathrm{d}t + \left(F-M\cdot\frac{p}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)}{t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} + \frac{F-M\cdot\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left|t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right| + \frac{F-M\cdot\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{F-M\cdot\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C$$

Интегрирование дроби IV типа проводится аналогично интегрированию дроби III типа.

Пример 22. Найти интеграл от дроби III типа:

$$\int \frac{3x-5}{x^2-4x+13}\mathrm{d}x = \int \frac{3x-5}{(x^2-4x+4)+9}\mathrm{d}x = \int \frac{3x-5}{(x-2)^2+9}\mathrm{d}x =$$

($D = 16 - 52 < 0 \Rightarrow$ дробь III типа)

$$= \begin{bmatrix} \text{Замена} \\ x-2=t \\ x=t+2 \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{3(t+2)-5}{t^2+9}\mathrm{d}t = \int \frac{3t+1}{t^2+9}\mathrm{d}t = \int \frac{3t}{t^2+9}\mathrm{d}t + \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+9} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}(t^2+9)}{t^2+9} + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} = \frac{3}{2}\ln\left|t^2+9\right| + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|(x-2)^2+9\right| + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3} + C = \frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+13\right| + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}$$

.

Ответ: $\int \frac{3x-5}{x^2-4x+13}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+13\right| + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3} + C$.

Пример 23. Найти интеграл от дроби IV типа:

$$\int \frac{(5x-1)\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^2} = \int \frac{(5x-1)\mathrm{d}x}{((x^2+2x+1)+1)^2} = \int \frac{(5x-1)\mathrm{d}x}{((x+1)^2+1)^2} = \begin{bmatrix} \text{Замена} \\ x+1=t \\ x=t-1 \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{5t-6}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t = 5\int \frac{t\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} - 6\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}(t^2+1)}{(t^2+1)^2} - 6\int \frac{1+t^2-t^2}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{t^2+1}\right) - 6\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} + 6\int \frac{t^2\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \left[\begin{array}{c|c} u=t & \mathrm{d}u=\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v=\frac{t\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} & v=-\frac{1}{2(t^2+1)} \end{array}\right] =$$

$$=-\frac{5}{2(t^2+1)}-6\operatorname{arctg} t+6\left(-\frac{t}{2(t^2+1)}+\int\frac{\mathrm{d}t}{2(t^2+1)}\right)=-\frac{5}{2(t^2+1)}-6\operatorname{arctg} t-\frac{3t}{t^2+1}+$$

$$+3\operatorname{arctg} t+C=-\frac{6t+5}{2(t^2+1)}-3\operatorname{arctg} t+C=-\frac{6x+11}{2(x^2+2x+2)}-3\operatorname{arctg}(x+1)+C.$$

Ответ: $\displaystyle\int\frac{(5x-1)\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^2}=-\frac{6x+11}{2(x^2+2x+2)}-3\operatorname{arctg}(x+1)+C$.

Итак, любая рациональная дробь интегрируема. Для этого необходимо выполнить следующие шаги:

1) Выделить целую часть дроби, если дробь является неправильной, т.е. представить в виде:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=T_{m-n}(x)+\frac{R_r(x)}{Q_n(x)},$$

где $T_{m-n}(x)$ и $R_r(x)$ – многочлены степени $m–n$ и r соответственно (причём $r < n$).

2) Разложить правильную рациональную дробь $\frac{R_r(x)}{Q_n(x)}$ на сумму простых дробей.

3) Вычислить интегралы от многочлена $T_{m-n}(x)$ и каждой из простых дробей, полученных на шаге 2).

Пример 24. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{x^4+1}{x^3-x^2}\mathrm{d}x$

1) Дробь $\frac{x^4+1}{x^3-x^2}$ – неправильная рациональная дробь. Выделим целую часть:

$$\begin{array}{r|l} x^4+1 & x^3-x^2 \\ \cline{2-2} -\;\underline{x^4-x^3} & x+1 \\ x^3+1 & \\ -\;\underline{x^3-x^2} & \\ x^2+1 & \end{array}$$

Поэтому можно записать:

$$\frac{x^4+1}{x^3-x^2}=x+1+\frac{x^2+1}{x^3-x^2}.$$

2) Полученную правильную дробь $\frac{x^2+1}{x^3-x^2}$ разложим на сумму простых дробей:

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2}=\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-1}=\frac{Ax-A+Bx^2-Bx+Cx^2}{x^2(x-1)}$$

$$x^2+1=(B+C)x^2+(A-B)x-A$$

$$\begin{array}{c} x^2 \\ x \\ x^0 \end{array}\begin{cases} B+C=1 \\ A-B=0 \\ -A=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} A=-1 \\ B=-1 \\ C=2 \end{cases}$$

Отсюда следует: $\displaystyle\frac{x^2+1}{x^3-x^2}=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}$.

Значит, подынтегральную рациональную дробь можем представить в виде:

$$\frac{x^4+1}{x^3-x^2}=x+1-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}.$$

3) Найдём интеграл:

$$\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2}\mathrm{d}x = \int\left(x+1-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}x+\int \mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+2\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1} =$$

$$= \frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{x}-\ln|x|+2\ln|x-1|+C.$$

Ответ: $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{x}-\ln|x|+2\ln|x-1|+C.$

5. Интегрирование тригонометрических выражений

1) Интеграл вида $\displaystyle\int \sin^m x\cdot\cos^n x dx \quad (n,m\in Z)$

а) Если n – чётное число и m – чётное, то подынтегральное выражение преобразуют с помощью формул:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

б) Если одно из чисел m или n – нечётное, то выполняют замену:

$t = \sin x$, если n – нечётное;

$t = \cos x$, если m – нечётное.

Эта замена приводит к интегрированию степенных интегралов или рациональных дробей. **[1]**

в) Если оба числа m и n – нечётные, то интеграл берется как в случае замены:

$t = \sin x$, так и $t = \cos x$.

Пример 25. Вычислить интеграл:

$$\int \sin^2 x\cdot\cos^4 x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int\sin^2 2x\cdot\cos^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int\frac{1-\cos 4x}{2}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{16}\int(1-\cos 4x+\cos 2x-\cos 4x\cdot\cos 2x)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{16}\int\mathrm{d}x-\frac{1}{64}\int\cos 4x\mathrm{d}(4x)+\frac{1}{32}\int\cos 2x\mathrm{d}(2x)-\frac{1}{32}\int(\cos 2x+\cos 6x)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{32}\sin 2x-\frac{1}{64}\sin 2x-\frac{1}{192}\sin 6x+C =$$

$$= \frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{64}\sin 2x-\frac{1}{192}\sin 6x+C.$$

Ответ:

$$\int\sin^2 x\cdot\cos^4 x\mathrm{d}x = \frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{64}\sin 2x-\frac{1}{192}\sin 6x+C.$$

Пример 26. Вычислить интеграл:

$$\int\frac{\sin^6 x}{\cos x}\mathrm{d}x = \int\frac{\sin^6 x}{\cos^2 x}\cdot\cos x\mathrm{d}x = \int\frac{\sin^6 x\cdot\mathrm{d}(\sin x)}{\cos^2 x} = \begin{bmatrix}\text{Замена}\\ t=\sin x\\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}\sin x\end{bmatrix} =$$

$$= \int\frac{t^6\mathrm{d}t}{1-t^2} = -\int\left(t^4+t^2+1\right)\mathrm{d}t-\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = -\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}-t-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C =$$

$$= -\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{\sin^3 x}{3}-\sin x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+C.$$

Ответ: $\displaystyle\int\frac{\sin^6 x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{\sin^3 x}{3}-\sin x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+C.$

Пример 27. Вычислить интеграл:

$$\int\frac{\cos x}{\sin^3 x}\mathrm{d}x=\begin{bmatrix} t=\sin x \\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}\sin x=\cos x\mathrm{d}x\end{bmatrix}=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^3}=-\frac{1}{2t^2}+C=-\frac{1}{2\sin^2 x}+C.$$

Ответ: $\int\frac{\cos x}{\sin^3 x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2\sin^2 x}+C.$

2) Интегралы вида:

$$\int\sin(mx)\cdot\cos(nx)\mathrm{d}x\,;\quad \int\sin(mx)\cdot\sin(nx)\mathrm{d}x\,;\ \int\cos(mx)\cdot\cos(nx)\mathrm{d}x$$

где $n,m\in R; n\neq m.$

Такие интегралы находят после предварительного применения формул:

$$\sin(mx)\cdot\cos(nx)=\frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\right),$$

$$\sin(mx)\cdot\sin(nx)=\frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\right),$$

$$\cos(mx)\cdot\cos(nx)=\frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x+\cos(m+n)x\right).$$

Пример 28. Вычислить интеграл:

$$\int\sin 3x\cdot\cos 5x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(\sin(8x)+\sin(-2x)\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\sin 8x\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\sin 2x\mathrm{d}x=$$

$$=-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{4}\cos 2x+C.$$

Ответ: $\int\sin 3x\cdot\cos 5x\mathrm{d}x=-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{4}\cos 2x+C.$

3) Интеграл вида: $\int f(\sin x;\cos x)\mathrm{d}x$, где $f(u;v)$ – рациональная функция двух переменных.

Такие интегралы приводятся к интегралам от рациональной дроби с помощью замены:

$$t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}\ ;$$

$$x=2\mathrm{arctg}\,t\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2};$$

$$\sin x=\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{2t}{1+t^2}\ ;\quad \cos x=\frac{1-\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ .$$

Пример 29. Вычислить интеграл:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x}=\begin{bmatrix} t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}\Rightarrow x=2\mathrm{arctg}\,t \\ \mathrm{d}t=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\end{bmatrix}=\int\frac{\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}\left(1+t^2\right)^3}{(2t)^3}=\frac{1}{4}\int\frac{\left(1+t^2\right)^2}{t^3}\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1+2t^2+t^4}{t^3}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^3}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t}+\frac{1}{4}\int t\mathrm{d}t=$$

$$=-\frac{1}{8t^2}+\frac{1}{2}\ln|t|+\frac{1}{8}t^2+C=-\frac{1}{8\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}+\frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{8}+C\ .$$

Ответ: $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x}=-\frac{1}{8\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}+\frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{8}+C\ .$

4) Интегралы вида: $\int f(\sin^2 x;\cos^2 x)\mathrm{d}x$, где $f(u;v)$ – рациональная функция двух переменных.

Такие интегралы находят сведением к интегралу от рациональной дроби с помощью замены:

$$t=\mathrm{tg}x \Rightarrow x=\mathrm{arctg}t \Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

$$\sin^2 x=\frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}=\frac{t^2}{1+t^2};\quad \cos^2 x=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}=\frac{1}{1+t^2}$$

Пример 30. Вычислить интеграл:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x-4\cos^2 x}=\left[\begin{array}{c}\text{Замена}\\ t=\mathrm{tg}\,x\Rightarrow x=\mathrm{arctg}\,t\\ \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2};\sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2};\cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}\end{array}\right]=\int\frac{\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}-4\cdot\frac{1}{1+t^2}}=$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-4}=\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,x-2}{\mathrm{tg}\,x+2}\right|+C.$$

Ответ: $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x-4\cos^2 x}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,x-2}{\mathrm{tg}\,x+2}\right|+C.$

5) Интегралы вида: $\int\mathrm{tg}^m x\,\mathrm{d}x$; $\int\mathrm{ctg}^m x\mathrm{d}x$, где $m\in N(m\geq 2)$.

Такие интегралы находят после предварительного применения формул:

$$\mathrm{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1;\quad \mathrm{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}-1$$

или с помощью замены:

$$t=\mathrm{tg}\,x\Rightarrow x=\mathrm{arctg}t\Rightarrow\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2};\qquad\text{или}$$

$$t=\mathrm{ctg}\,x\Rightarrow x=\mathrm{arcctg}t\Rightarrow\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Пример 31. Вычислить интеграл:

$$\int tg^4 x\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{c}\text{Замена}\\ t=\mathrm{tg}\,x\Rightarrow x=\mathrm{arctg}\,t\\ \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\end{array}\right]=\int\frac{t^4}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int\left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=$$

$$=\int t^2\mathrm{d}t-\int\mathrm{d}t+\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{t^3}{3}-t+\mathrm{arctg}\,t+C=\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x-\mathrm{tg}\,x+x+C.$$

Ответ: $\int\mathrm{tg}^4 x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x-\mathrm{tg}x+x+C.$

6. Интегрирование некоторых видов иррациональных выражений

1) Интеграл вида $\int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+C}}\mathrm{d}x$

Такие интегралы находят с помощью преобразований и замены, аналогичных преобразованиям и замене для нахождения интеграла от простой рациональной дроби III типа. **[1]**

Пример 32. Вычислить интеграл:

$$\int\frac{(x-5)dx}{\sqrt{6+4x-x^2}}=\int\frac{(x-5)dx}{\sqrt{-(x-2)^2+10}}=\begin{bmatrix}\text{Замена}\\ x-2=t\\ x=t+2\\ dx=dt\end{bmatrix}=\int\frac{(t-3)dt}{\sqrt{10-t^2}}=$$

$$=\int\frac{tdt}{\sqrt{10-t^2}}-3\int\frac{dt}{\sqrt{10-t^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(10-t^2)}{\sqrt{10-t^2}}-3\arcsin\frac{t}{\sqrt{10}}=$$

$$=-\sqrt{10-t^2}-3\arcsin\frac{t}{\sqrt{10}}+C=-\sqrt{6+4x-x^2}-3\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{10}}+C.$$

Ответ: $\int\frac{(x-5)dx}{\sqrt{6+4x-x^2}}=-\sqrt{6+4x-x^2}-3\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{10}}+C.$

2) Подынтегральная функция содержит $\sqrt{a^2-x^2}$.

Тогда надо выполнить замену:

$$x=a\sin t;\quad \left(t=\arcsin\frac{x}{a}\right)$$

$$dx=a\cos t dt$$

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$$

Такая замена приводит к интегралу от некоторого тригонометрического выражения.

Пример 33. Вычислить интеграл:

$$\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx=\begin{bmatrix}x=2\cdot\sin t; t=\arcsin\frac{x}{2}\\ dx=2\cos t\\ \sqrt{4-x^2}=2\cos t\end{bmatrix}=\int\frac{2\cos t\cdot 2\cos t dt}{2\sin t}=$$

$$=2\int\frac{\cos^2 t}{\sin t}dt=2\int\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\cdot\sin t dt=2\int\frac{\cos^2 t(-d(\cos t))}{1-\cos^2 t}=$$

$$=2\int\frac{1-\cos^2 t-1}{1-\cos^2 t}d(\cos t)=2\int d(\cos t)-2\int\frac{d\cos t}{1-\cos^2 t}=$$

$$=2\cos t-\frac{2}{2}\ln\left|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right|+C=\sqrt{4-x^2}-\ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}\right|+C=$$

$$=\sqrt{4-x^2}-\ln\left|\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{2-\sqrt{4-x^2}}\right|+C.$$

Ответ*:* $\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx=\sqrt{4-x^2}-\ln\left|\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{2-\sqrt{4-x^2}}\right|+C.$

3) Подынтегральная функция содержит $\sqrt{x^2-a^2}$.

Тогда надо выполнить замену:

$$x=\frac{a}{\cos t};\quad \left(t=\arccos\frac{a}{x}\right)$$

$$dx=\frac{a\cdot\sin t}{\cos^2 t}dt$$

$$\sqrt{x^2-a^2}=a\,\mathrm{tg}\,t$$

Пример 34. Вычислить интеграл:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-9}}=\left[\begin{gathered}\text{Замена}\\ x=\frac{3}{\cos t};\sqrt{x^2-9}=3\operatorname{tg}t\\ \mathrm{d}x=\frac{3\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t\end{gathered}\right]=\int\frac{\frac{3\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t}{\frac{3}{\cos t}\cdot 3\frac{\sin t}{\cos t}}=\frac{1}{3}\int\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{1}{3}t+C=\frac{1}{3}\cdot\arccos\frac{3}{x}+C.$$

Ответ: $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-9}}=\frac{1}{3}t+C=\frac{1}{3}\cdot\arccos\frac{3}{x}+C.$

4) Подынтегральная функция содержит $\sqrt{x^2+a^2}$.

Тогда надо выполнить замену:

$$x=a\cdot\operatorname{tg}t;\quad\left(t=\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)$$

$$\mathrm{d}x=\frac{a}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$$

$$\sqrt{x^2+a^2}=\frac{a}{\cos t}$$

Пример 35. Вычислить интеграл:

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}\mathrm{d}x=\left[\begin{gathered}\text{Замена}\\ x=2\operatorname{tg}t;t=\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\\ \mathrm{d}x=\frac{2}{\cos^2 t}\mathrm{d}t;\sqrt{4+x^2}=\frac{2}{\cos t}\end{gathered}\right]=\int\frac{8\frac{\sin^3 t}{\cos^3 t}\cdot\frac{2}{\cos^2 t}\mathrm{d}t}{\frac{2}{\cos t}}=$$

$$=8\int\frac{\sin^3 t}{\cos^4 t}\mathrm{d}t=8\int\frac{\sin^2 t\cdot\sin t\,\mathrm{d}t}{\cos^4 t}=-8\int\frac{\left(1-\cos^2 t\right)\mathrm{d}\cos t}{\cos^4 t}=$$

$$=-8\int\frac{\mathrm{d}\cos t}{\cos^4 t}+8\int\frac{\mathrm{d}\cos t}{\cos^2 t}=-8\left(-\frac{1}{3\cos^3 t}\right)+8\left(-\frac{1}{\cos t}\right)+C=$$

$$=\frac{8\cdot\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}{3\cdot 8}-\frac{8\cdot\sqrt{4+x^2}}{2}+C=\frac{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}{3}-4\sqrt{4+x^2}+C.$$

Ответ: $\displaystyle\int\frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}{3}-4\sqrt{4+x^2}+C.$

5) Подынтегральная функция содержит $\sqrt[n]{ax+b}$:

Тогда надо выполнить замену:

$$t=\sqrt[n]{ax+b}\,.$$

Пример 36. Вычислить интеграл:

$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{2x+3}}=\left[\begin{gathered}\text{Замена}\\ \sqrt[3]{2x+3=t}\\ x=\frac{t^3-3}{2};\mathrm{d}x=\frac{3t^2}{2}\mathrm{d}t\end{gathered}\right]=\int\frac{(t^3-3)\cdot 3t^2\mathrm{d}t}{2\cdot(1+t)\cdot 2}=\frac{3}{4}\cdot\int\frac{t^5-3t^2}{1+t}\mathrm{d}$$

$$\frac{t^5-3t^2}{1+t}=t^4-t^3+t^2-4t+4-\frac{4}{1+t}$$

$$=\frac{3}{4}\int\left(t^4-t^3+t^2-4t+4-\frac{4}{1+t}\right)\mathrm{d}t=\frac{3}{4}\int t^4\mathrm{d}t-\frac{3}{4}\int t^3\mathrm{d}t+\frac{3}{4}\int t^2\mathrm{d}t+3\int t\mathrm{d}t-3\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=$$

$$=\frac{3}{20}t^5-\frac{3}{16}t^4+\frac{1}{4}t^3-\frac{3t^2}{2}+3t-3\ln|1+t|+C=\frac{3}{20}\sqrt[3]{(2x+3)^5}-\frac{3}{16}\sqrt[3]{(2x+3)^4}+$$

$$+\frac{1}{4}(2x+3)-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(2x+3)^2}+3\sqrt[3]{2x+3}-3\ln\left|1+\sqrt[3]{2x+3}\right|+C.$$

Ответ: $\int\frac{x\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{2x+3}}=\frac{3}{20}\sqrt[3]{(2x+3)^5}-\frac{3}{16}\sqrt[3]{(2x+3)^4}+$

$$+\frac{1}{4}(2x+3)-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(2x+3)^2}+3\sqrt[3]{2x+3}-3\ln\left|1+\sqrt[3]{2x+3}\right|+C.$$

Пример 37. Вычислить интеграл:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}=\left[\begin{matrix}\text{Замена}\\ x=t^6\Rightarrow t=\sqrt[6]{x}\\ \mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t\end{matrix}\right]=\int\frac{6t^5\mathrm{d}t}{t^2+t^3}=6\int\frac{t^5}{t^2(1+t)}\mathrm{d}t=6\int\frac{t^3}{1+t}\mathrm{d}t=$$

$$=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=6\int t^2\mathrm{d}t-6\int t\mathrm{d}t+6\int\mathrm{d}t-6\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=$$

$$=6\cdot\frac{t^3}{3}-6\frac{t^2}{2}+6t-6\ln|1+t|+C=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|1+\sqrt[6]{x}\right|+C.$$

Ответ: $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|1+\sqrt[6]{x}\right|+C.$

7. Контрольные вопросы

1 Дать определение первообразной функции.
2.Дать определение неопределенного интеграла. Указать его геометрический смысл.
3.Сформулировать свойства неопределенного интеграла.
4.Написать таблицу основных интегралов.
5.Замена переменной в неопределенном интеграле.
6.Интегрирование по частям.
7.Как интегрируются простейшие рациональные дроби I, II, III типа?
8.Сформулировать теорему о разложении правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей.
9.Интегрирование неправильных дробей.
10.Как интегрируются тригонометрические функции?
11.Указать тригонометрические подстановки для интегралов:
$\int R(x\sqrt{a^2-x^2})dx$, $\int R(x\sqrt{a^2+x^2})dx$

8. Задания для самостоятельного решения

Найти неопределенные интегралы.

1. а) $\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}$, б) $\int\frac{\ln^2 x}{x^2}dx$,

в) $\int\frac{x+2}{x^2+2x+5}dx$, г) $\int\frac{dx}{1+\sin x}$.

2. а) $\int\frac{\ln(tg\,x)}{\sin x\cdot\cos x}dx$, б) $\int x^2\cdot e^{-\frac{x}{2}}dx$,

в) $\int\frac{3x-1}{\sqrt{2x^2-5x+1}}dx$, г) $\int\frac{dx}{4\sin x-6\cos x}$

3. а) $\int\frac{3^{arctg\,x}}{1+x^2}dx$, б) $\int x^2\cdot\sin 4x\,dx$, в) $\int \frac{2x-3}{x^2+2x-7}\,dx,$ г) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx.$

4. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+4}},$ б) $\int x\cdot \sin 4x\,dx,$

в) $\int \frac{x-2}{\sqrt{3-2x^2}}\,dx,$ г) $\int \frac{3x^2-15}{(x-1)\cdot\left(x^2+5x+6\right)}dx.$

5. а) $\int \frac{1+3x}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx,$ б) $\int x^2\cdot 5^x\,dx,$

в) $\int \frac{x+1}{2x^2+x+1}\,dx,$ г) $\int \frac{6x^2}{(x-1)\cdot\left(x^2+3x+2\right)}dx.$

6. а) $\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}\,dx,$ б) $\int x^2\cdot e^x\,dx,$

в) $\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+13}},$ г) $\int \frac{2x^2-26}{\left(x^2+4x+3\right)\cdot(x+5)}dx.$

7. а) $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$ б) $\int \sqrt{x}\cdot \ln^2 x\,dx,$

в) $\int \frac{4x-1}{4x^2-4x+5}\,dx,$ г) $\int \frac{dx}{4-5\cos x}.$

8. а) $\int \frac{\sin 2x\,dx}{3\sin^2 x+4},$ б) $\int x^2\cdot \cos 6x\,dx,$

в) $\int \frac{x-8}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx,$ г) $\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}.$

9. а) $\int \frac{e^{2x}dx}{5\cdot e^{2x}+1},$ б) $\int \frac{arctg^4 x}{x^2+1}\,dx,$

в) $\int \frac{5x+1}{x^2-4x+1}\,dx,$ г) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx.$

10. а) $\int \frac{x+arctg\,x}{x^2+1}\,dx,$ б) $\int e^{3x}\cdot \sin x\,dx,$

в) $\int \frac{x-5}{\sqrt{3x^2-6x-1}}\,dx,$ г) $\int \frac{dx}{3\cos x+4\sin x}$

§ 3. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Задача, приводящая к определённому интегралу

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная неотрицательная функция $y = f(x)$.

Определение 1. Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная осью абсцисс, прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$.

Задача: вычислить площадь этой криволинейной трапеции (рис. 1)

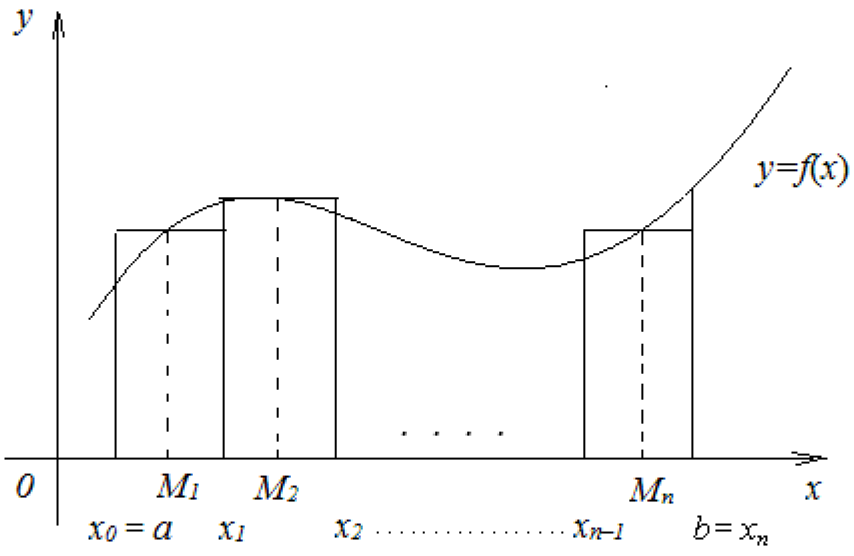


Рис. 1

Решение.

1) Разобьём отрезок $[a;b]$ на n частей точками $x_0 = a; x_1; x_2; x_{n-1}; x_n = b$ и проведём прямые $x = x_1, x = x_2, \dots x = x_{m-1}$, которые разобьют трапецию на n частей.

2) Обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ – длины отрезков разбиения $[a;b]$. На каждом из отрезков произвольно выберем точку M_k $(k = 1, 2,\dots, n)$.

Построим на каждом из отрезков прямоугольники с высотами, равными значению функции в выбранных точках M_k.

Площади полученных прямоугольников равны:

$$S_1 = f(M_1)\cdot \Delta x_1;\ S_2 = f(M_2)\cdot \Delta x_2, \dots,\ S_n = f(M_n)\cdot \Delta x_n.$$

3)Найдём сумму этих площадей:

$$\bar{S} = f(M_1)\cdot\Delta x_1 + f(M_2)\cdot\Delta x_2 + \dots + f(M_n)\cdot\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta x_k$$

Получили площадь ступенчатой фигуры. Эта площадь зависит от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на части и от выбора на каждой из частей точек M_k $(k = 1, 2,\dots, n)$.

Чем больше будет точек разбиения отрезка $[a;b]$ на части и мельче по длине эти части, тем точнее сумма $\overline{S} = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta x_k$ будет приближаться к площади данной криволинейной трапеции, т.е. можно записать:

$$S_{\text{крив.тр.}} = \lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ n\to\infty}} \bar{S} = \lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta x_k$$

Определение 2. Сумма $\bar{S} = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta x_k$ называется интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Определение 3. Предел интегральной суммы $\bar{S}$ функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ при $n \to \infty$ и $\max \Delta x_k \to 0$ называется определённым интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на части, ни от выбора точек M_k $(k = 1,\dots, n)$ на каждой из частей. То есть:

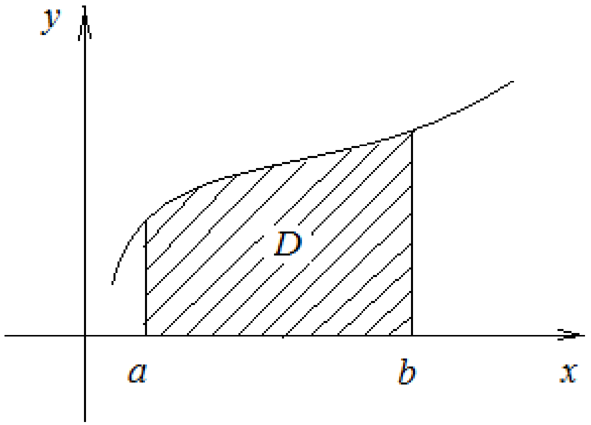
$$S_{\text{крив.тр.}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta x_r = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

При этом отрезок $[a;b]$ называют отрезком интегрирования, “*a*” – нижним пределом интегрирования, “*b*” – верхним пределом.

Теорема 1 (достаточное условие интегрируемости функции на отрезке $[a;b]$). Если функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ непрерывна, то определённый интеграл $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ существует, т.е. функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ интегрируема. **[3]**

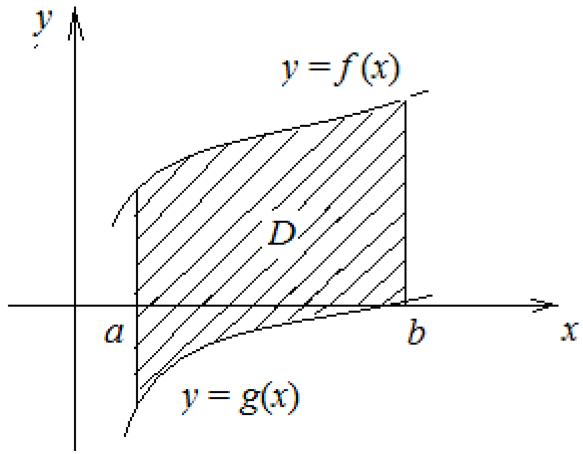
2. Геометрический смысл определённого интеграла

1) $S_{\text{кр.тр.}} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$



2) Если область ограничена двумя кривыми $y = f(x)$ и $y = g(x)$, причём при $x \in [a;b]$ $f(x) \ge g(x)$, то площадь области, ограниченной кривыми $y = f(x)$; $y = g(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, вычисляется по формуле:

$$S_D = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)\mathrm{d}x$$



3. Свойства определённого интеграла

1) $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$

2) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$

3) $\int_a^b k\cdot f(x)\mathrm{d}x = k\cdot\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

4) $\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$

5) Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a;c]$ и $[c;b]$, то она интегрируема и на отрезке $[a;b]$, причём верно равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

при любом расположении точек *a, b* и *c* на оси *Ox*.

6) Если $f(x) \geq 0$ при $x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$$

7) Если на отрезке $[a;b]$ $f(x) \geq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

8) **Теорема 2 (о среднем значении определённого интеграла).** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то на этом отрезке найдётся хотя бы одна точка *c*, в которой выполняется равенство:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)\cdot(b-a)$$

4. Вычисление определенного интеграла.

4.1 Интеграл с переменным верхним и постоянным нижним пределами и его свойства

Определение 4. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда она непрерывна на отрезке $[a;x]$ для любого $x \in [a;b]$. Следовательно, на отрезке $[a;b]$ определена функция $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, которая называется интегралом с переменным верхним пределом.

Свойства этой функции сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда функция $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ обладает свойствами:

1) непрерывна на отрезке $[a;b]$;

2) имеет производную $F'(x)$ в каждой точке $x \in [a;b]$, удовлетворяющую равенству $F'(x) = \left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)' = f(x)$.

Из теоремы 3 следует, что функция $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ является первообразной для функции $f(x)$.

4.2 Формула Ньютона–Лейбница

Теорема 4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $\Phi(x)$ – какая-либо её первообразная на отрезке $[a;b]$. Тогда определённый интеграл от функции $f(x)$ по отрезку $[a;b]$ равен разности значений функции $\Phi(x)$ в точках *b* и *a*:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Это и есть формула Ньютона–Лейбница. Она является основной формулой интегрального исчисления, и даёт правило вычисления определённого интеграла.

Формулу Ньютона–Лейбница часто записывают в виде:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \Phi(x)\Big|_a^b ,$$

где используется обозначение:

$$\Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Задача вычисления определённого интеграла свелась к нахождению первообразной непрерывной функции. **[2]**

Пример 1. Вычислить интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = -\cos\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0) = -(0-1) = 1.$$

Ответ: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = 1$.

Пример 2. Вычислить интеграл:

$$\int_2^3 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|\Big|_2^3 = \frac{1}{2}(\ln 10 - \ln 5) = \frac{1}{2}\ln\frac{10}{5} = \frac{1}{2}\ln 2$$

.

Ответ: $\int_2^3 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln 2$.

5. Методы интегрирования определённого интеграла

5.1.Замена переменной в определённом интеграле

Теорема 5. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и пусть функция $x = \varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha;\beta]$, область значений этой функции – отрезок $[a;b]$, т.е. $a \le \varphi(t) \le b$ для $t \in [\alpha;\beta]$, причём $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Тогда справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

Пример 3. Вычислить интеграл:

$$\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} = \left[\begin{array}{c} \text{Замена} \\ \sqrt{x} = t \\ x = t^2, \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t, \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 4 & 2 \end{array} \end{array}\right] = \int_0^2 \frac{2t\mathrm{d}t}{1+t} = 2\int_0^2 \frac{t+1-1}{1+t}\mathrm{d}t =$$

$$2\int_0^2 \mathrm{d}t - 2\int_0^2 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = 2t\Big|_0^2 - 2\ln|1+t|\Big|_0^2 = 4 - 0 - 2\ln 3 + 2\ln 1 = 4 - 2\ln 3.$$

Ответ: $\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} = 4 - 2\ln 3$.

Пример 4. Вычислить интеграл:

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{c}\text{Замена}\\ x=2\sin t,\sqrt{4-x^2}=2\cos t\\ \mathrm{d}x=2\cos t\mathrm{d}t,\ \begin{array}{c|c|c}\frac{x}{t} & \frac{0}{0} & \frac{2}{\frac{\pi}{2}}\end{array}\end{array}\right]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2 t\cdot 2\cos t\cdot 2\cos t\mathrm{d}t=$$

$$=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot\cos^2 t\mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{2}\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4t\mathrm{d}t=$$

$$=2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\sin 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-\frac{1}{2}(\sin 2\pi-\sin 0)=\pi.$$

Ответ: $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=\pi.$

5.2. Интегрирование по частям в определённом интеграле

Теорема 6. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a;b]$. Тогда справедливо равенство:

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\mathrm{d}x=u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)\cdot u'(x)\mathrm{d}x.$$

Эту формулу удобно записать в виде:

$$\int_a^b u\mathrm{d}v=(u\cdot v)\Big|_a^b-\int_a^b v\cdot\mathrm{d}u$$

Пример 5. Вычислить интеграл:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\cdot\operatorname{arctg} x\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{c|c}u=\operatorname{arctg} x & \mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\\ \mathrm{d}V=x\mathrm{d}x & V=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right]=\left(\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x\right)\Big|_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=$$

$$=\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{3}-0-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\mathrm{d}x+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}x\Big|_0^{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{3}=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\int_0^{\sqrt{3}} x\cdot\operatorname{arctg} x\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Пример 6. Вычислить интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\sin x\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{c|c}u=x & \mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}V=\sin x\mathrm{d}x & V=-\cos x\end{array}\right]=-x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=$$

$$= -\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + 0\cdot\cos 0 + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2}\cdot 0 + 0\cdot 1 + \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 0 + 0 + 1 - 0 = 1.$$

Ответ: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\sin x\mathrm{d}x = 1.$

6. Приложения определённого интеграла

6.1. Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольной системе координат

а) Область D ограничена кривыми $y = f(x)$ и $y = g(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$, причём $f(x) \ge g(x)$ для $x \in [a;b]$.

$$S_D = \int\limits_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\mathrm{d}x.$$

б) Область D ограничена кривыми $x = f(y)$ и $x = g(y)$, прямыми $y = c$ и $y = d$, причём $f(y) \ge g(y)$ для $y \in [c;d]$.

$$S_D = \int\limits_c^d \big(f(y) - g(y)\big)\mathrm{d}y.$$

6.2. Вычисление площади плоской фигуры в полярной системе координат

а) *Полярная система* координат задается полярной осью Ox, полюсом – точка O и масштабной единицей (рис. 2)

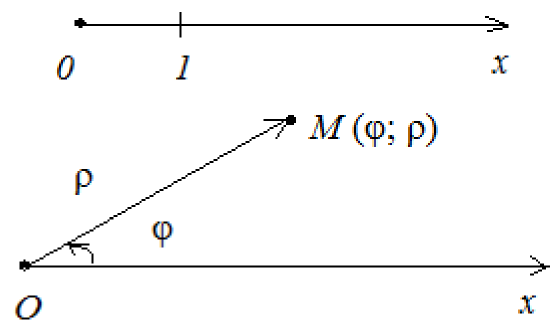


Рис. 2

Точка M в этой системе задаётся двумя координатами (φ и ρ): φ – угол наклона радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ к оси Ox; ρ – длина радиуса-вектора $\left|\overrightarrow{OM}\right|$.

Формулы перехода от полярной системы координат к прямоугольной системе, связанной с полярной точкой начала координат – точка *0*, осью абсцисс с полярной осью и осью ординат, перпендикулярной полярной оси

$$M(\varphi;\rho) = M(x;y): \left[\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{array}\right. \quad \text{и} \quad \left[\begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \mathrm{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} \end{array}\right.$$

Уравнение кривой в полярной системе координат – соотношение между ρ и φ: $\rho = \rho(\varphi)$.

б) Площадь криволинейного сектора в полярной системе, ограниченного лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, кривой $\rho = \rho(\varphi)$ (рис. 3), вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi.$$

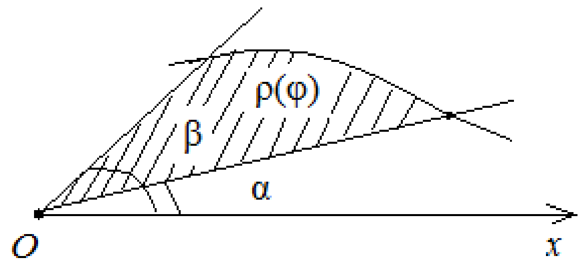


Рис.3

6.3 Вычисление объёма тела по площадям параллельных сечений

Пусть задано объёмное тело T, для которого известна площадь $S(x)$ любого сечения плоскостью, проходящей через точку $(x;0;0)$ перпендикулярно оси Ox, $a \le x \le b$ (рис. 4). Нужно вычислить объём тела.

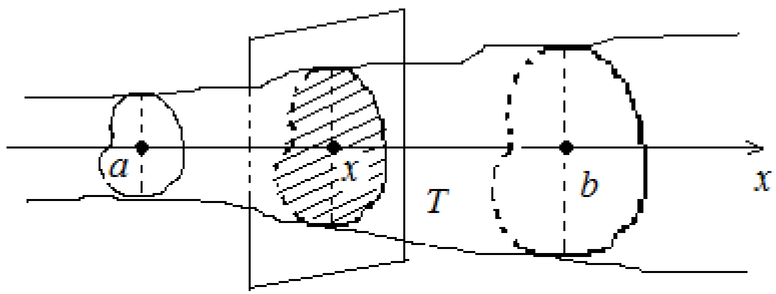


Рис. 4

Пусть функция $S(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда объём тела T вычисляется по формуле:

$$V_T = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x.$$

6.4 Вычисление объёма тела вращения

Надо вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $ABCD$, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$.

В таком случае площадь поперечного сечения в точке $x \in [a;b]$ круг радиусом $f(x)$ равна:

$$S(x) = \pi \cdot f^2(x).$$

Тогда объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $ABCD$, вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

Объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции $ABCD$, ограниченной кривой $x = \varphi(y)$, осью Oy и прямыми $y = c$, $y = d$, вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y)\mathrm{d}y.$$

7.Контрольные вопросы

1.Определение определенного интеграла, его геометрический смысл.

2.Сформулировать свойства определенного интеграла.

3.Формула Ньютона-Лейбница.

4.Замена переменной в определенном интеграле.

5.Записать формулу определенного интегрирования по частям.

6.Формулы вычисления площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

7.Формулы для вычисления объемов тел вращения.

8. Задания для самостоятельного решения

Вычислить интегралы:

1. $\int\limits_1^5 \frac{dx}{3x-2}.$ 2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3}.$ 3. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2+5x+4}.$ 4. $\int\limits_0^2 \frac{x+3}{x^2+4}dx.$

5. $\int\limits_{-2}^2 x\cos\frac{x}{2}dx.$ 6. $\int\limits_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{3x}{2}dx.$ 7. $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{(x+1)^4}.$ 8. $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}.$

9. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 xdx.$ 10. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\cos^2 xdx.$ 11. $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}.$ 12. $\int\limits_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{2+4x}}.$

13. $\int\limits_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx.$ 14. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2+x}.$ 15. $\int\limits_0^1 \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ 16. $\int\limits_0^{\pi/4} e^x\sin 2xdx.$

17. $\int\limits_1^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx.$ 18. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}.$ 19. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}.$

20. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2x\cdot\sin 3xdx.$

§ 4. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

При изучении определённого интеграл от функции $f\ (x)$, требуется, чтобы функция $f\,(x)$ удовлетворяла следующим условиям:

-была определена на конечном отрезке $[a;b]$;

-была непрерывна на отрезке $[a;b]$.

Если нарушено хотя бы одно из указанных условий, то речь будет идти о несобственных интегралах первого и второго рода. **[4]**

1. Интегралы с бесконечными пределами

Пусть функция $f\,(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$ или $(-\infty;a]$ или $(-\infty;+\infty)$.

Определение 1. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$, то этот предел называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ на бесконечном промежутке $[a;+\infty)$, обозначается $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ и в этом случае считается, что интеграл сходится. Если $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ не существует или равен ∞, то считается, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ расходится.

Аналогично определяются интегралы:

- $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to-\infty}\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$
- $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to-\infty}\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x + \lim\limits_{c\to+\infty}\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x$

Если пределы конечные, то соответствующий интеграл считают сходящимся, а если хотя бы один из пределов не существует или бесконечный, то интеграл считают расходящимся.

Пример 1. Исследовать на сходимость несобственный интеграл:

$$\int\limits_1^{+\infty} xe^{-2x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b xe^{-2x}\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c|c} u = x & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}V = e^{-2x}\mathrm{d}x & V = -\dfrac{1}{2}e^{-2x} \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{x}{2}e^{-2x}\Big|_1^b + \frac{1}{2}\int\limits_1^b e^{-2x}\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{b}{2e^{+2b}} + \frac{e^{-2}}{2} - \frac{1}{4}e^{-2x}\Big|_1^b\right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{b}{2e^{2b}} + \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{4}e^{-2b} + \frac{1}{4}e^{-2}\right) = -\lim_{b\to+\infty}\frac{b}{2e^{2b}} - \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{4e^{2b}} +$$

$$= -\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{4e^{2b}} - 0 + \frac{3}{4e^2} = \frac{3}{4e^2}$$

Так как получили конечное число, то интеграл $\int\limits_1^{+\infty} xe^{-2x}\mathrm{d}x$ сходится и равен $\dfrac{3}{4e^2}$.

Ответ: $\int\limits_1^{+\infty} xe^{-2x}\mathrm{d}x = \dfrac{3}{4e^2}$.

2. Интегралы от разрывных функций

1) Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$, а в точке $x = b$ либо не определена, либо имеет разрыв. Такую точку $x = b$ будем называть особой точкой функции $f(x)$.

Определение 2. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$, то он называется несобственным интегралом второго рода от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$. При этом говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ сходится и записывается равенство:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x.$$

Если конечный предел не существует или он бесконечный, то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ расходится.

2) Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$, а в точке $x = a$ либо не определена, либо имеет разрыв. Такую точку $x = a$ называют особой точкой функции $f(x)$.

Определение 3. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x\right)$, то он называется несобственным интегралом второго рода от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается символом

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

При этом говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ сходится и записывается равенство:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x\right).$$

Если конечный предел не существует или бесконечен, то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится. **[3]**

Замечание. Если функция $f(x)$ имеет разрыв в некоторой точке $x = c$ внутри отрезка $[a;b]$, то по определению полагают:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x\right) + \lim_{\delta\to 0}\left(\int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)\mathrm{d}x\right)$$

при условии, что оба предела в правой части существуют, и ε и δ не зависят друг от друга. Этот интеграл также называют несобственным интегралом второго рода от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается символом:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Сходимость или расходимость такого интеграла зависит от существования или не существования конечного предела.

Пример 2. Исследовать на сходимость:

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^1 \ln x\,dx\right) = \left[\begin{array}{l|l} u=\ln x & du=\frac{1}{x}dx \\ dV=dx & V=x \end{array}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(x\ln x\Big|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 dx\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\Bigg|_\varepsilon^1 - x\Big|_\varepsilon^1\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\ln 1}{1} - \frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} - 1 + \varepsilon\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(0 - \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} - 1 + 0\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon - 1) = 0 - 1 = -1$$

Так получили конечное число, то $\int_0^1 \ln x\,dx$ сходится и равен «–1».

Ответ: $\int_0^1 \ln x\,dx = -1.$

Пример 3. Исследовать на сходимость:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin(1-\varepsilon)\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

Так как получили конечное число, то $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ сходится и равен $\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$.

Пример 4. Исследовать на сходимость:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2}\right) + \lim_{\delta\to 0}\left(\int_\delta^1 \frac{dx}{x^2}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{-\varepsilon}\right) + \lim_{\delta\to 0}\Bigg(\bigg(-$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) + \lim_{\delta\to 0}\left(-1 + \frac{1}{\delta}\right) = \infty + \infty = \infty$$

Так как получили бесконечность, то $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ расходится.

Ответ: $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ расходится.

3.Контрольные вопросы:

1. Какой интеграл называется несобственным?

2. Дайте определение несобственных интегралов 1-го и 2-го родов.

3. Сформулируйте свойства несобственных интегралов.

4. Укажите признаки сходимости несобственных интегралов для неотрицательных функций.

4. Задания для самостоятельного решения

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

1. $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+13}$.

2. $\int_{-\infty}^{-3}\frac{x\,dx}{\left(x^2+1\right)^2}$.

3. $\int_{0}^{3}\frac{dx}{(x-2)^2}$.

4. $\int_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$.

5. $\int_{0}^{2}\frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

6. $\int_{0}^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$.

7. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}$.

8. $\int_{e}^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}$.

9. $\int_{3}^{4}\frac{dx}{x^2-9}$.

10. $\int_{1}^{e}\frac{dx}{x\cdot\sqrt{\ln x}}$.

Контрольные вопросы:

1. Какой интеграл называется несобственным?

2. Дайте определение несобственных интегралов 1-го и 2-го родов.

3. Сформулируйте свойства несобственных интегралов.

4. Укажите признаки сходимости несобственных интегралов для неотрицательных функций.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Таблица основных интегралов

1 $\int dx = x + C;$

2 $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, \quad k \neq -1;$

3 $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C;$

4 $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$ 4a $\int e^x dx = e^x + C;$

5 $\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$

6 $\int \cos x\,dx = \sin x + C;$

7 $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C;$

8 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C;$

9 $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$

10 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \ln\left|\sqrt{x^2 \pm a^2} + x\right| + C;$

11 $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

12 $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

Образец решения варианта

Задание 1: Вычислить интеграл:

а)
$$\int\left(x^5+\frac{4}{x^3}-\sqrt[3]{x^2}-7\right)dx;$$

б) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}};$

в) $\displaystyle\int\frac{x^4}{\sin^2 x^5}\,dx;$

г) $\displaystyle\int 3^{2-7x}\,dx;$

д) $\displaystyle\int\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx;$

е)
$$\int e^x\cdot\sin e^x\,dx;$$

ж) $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{4-x^4}}\,dx;$

з) $\displaystyle\int\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-7}}\,dx;$

и)
$$\int\frac{\sin 5x}{4-\cos^2 5x}\,dx;$$

к) $\displaystyle\int x\cdot\operatorname{tg}x^2\,dx;$

л) $\displaystyle\int\frac{3^x}{9^x+4}\,dx;$

м)
$$\int x^2\cdot\cos x\,dx;$$

н) $\displaystyle\int\arccos x\,dx;$

о) $\displaystyle\int\frac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x}\,dx;$

п) $\displaystyle\int\frac{x^6}{x^2-x+1}\,dx;$

р)
$$\int\frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)};$$

с)
$$\int\frac{3x\,dx}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt[4]{3x^2-2}};$$

т)
$$\int\cos 3x\cos 5x\,dx;$$

у) $\displaystyle\int\sin^4 x\,dx;$

ф) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}};$

Решение:

а) Найдем интеграл, применив свойства неопределенного интеграла и формулы **(**1) и (2) табличного интегрирования:

$$\int\left(x^5+\frac{4}{x^3}-\sqrt[3]{x^2}-7\right)dx=\int\left(x^5+4\cdot x^{-3}-x^{\frac{2}{3}}-7\right)dx=\int x^5dx+4\int x^{-3}dx-\int x^{\frac{2}{3}}dx$$

$$=\frac{x^{5+1}}{5+1}+4\cdot\frac{x^{-3+1}}{-3+1}-\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}-7x+C=\frac{x^6}{6}+4\cdot\frac{x^{-2}}{-2}-\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}-7x+C=\frac{x^6}{6}-\frac{2}{x^2}-\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{5}$$

Интегралы (б – л) решим методом замены переменной.

б)
$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}}\left|\begin{array}{l}t=1+2x;\\ dt=2dx;\\ dx=\dfrac{1}{2}dt\end{array}\right|=\int\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt[4]{t^3}}=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{4}}dt=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (2)}

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{4}}}{1/4}+C=2(1+2x)^{1/4}+=2\sqrt[4]{1+2x}+C;$$

в)
$$\int\frac{x^4}{\sin^2 x^5}\,dx=\left|\begin{array}{l}t=x^5\\ dt=5x^4dx\\ x^4dx=\dfrac{1}{5}dt\end{array}\right|=\int\frac{\frac{1}{5}dt}{\sin^2 t}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{\sin^2 t}=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (12)}

$$=-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}t+C=-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}x^5+C;$$

г) $\int 3^{2-7x}dx = \begin{vmatrix} t = 2-7x, \\ dt = -7dx, \\ dx = -\frac{1}{7}dt \end{vmatrix} = \int 3^t \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)dt = -\frac{1}{7}\int 3^t dt =$

{для нахождения интеграла применим формулу (4)}

$= -\frac{1}{7}\cdot\frac{3^t}{\ln 3} + C = -\frac{1}{7}\cdot\frac{3^{2-7x}}{\ln 3} + C;$

д) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx = \begin{vmatrix} t = \operatorname{arctg} x \\ dt = \frac{1}{1+x^2}dx \end{vmatrix} = \int t dt =$

{для нахождения интеграла применим формулу (2)}

$= \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + C;$

е) $\int e^x \cdot \sin e^x dx = \begin{vmatrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{vmatrix} = \int \sin t dt =$

{для нахождения интеграла применим формулу (5)}

$= -\cos t + C = -\cos e^x + C;$

ж) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}}dx = \begin{vmatrix} t = x^2 \\ dt = 2xdx \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{vmatrix} = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{2^2-t^2}} =$

{для нахождения интеграла применим формулу (8)}

$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{2} + C;$

з)

$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-7}}dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{\left(e^x\right)^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2}}dx = \begin{vmatrix} t = e^x, \\ dt = e^x dx, \\ e^x dx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2}} =$

{для нахождения интеграла применим формулу (10)}

$= \ln\left|\sqrt{t^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2} + t\right| + C = \ln\left|\sqrt{e^{2x}-7} + e^x\right| + C;$

и)

$\int \frac{\sin 5x\ dx}{9-\cos^2 5x} = \begin{vmatrix} t = \cos 5x \\ dt = -5\sin 5x\, dx \\ \sin 5x\, dx = -\frac{1}{5}dt \end{vmatrix} = \int \frac{-\frac{1}{5}dt}{9-t^2} = \frac{1}{5}\int\frac{dt}{t^2-9} = \frac{1}{5}\int\frac{dt}{t^2-3^2} =$

{для нахождения интеграла применим формулу (9)}

$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right| + C = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{\cos 5x - 3}{\cos 5x + 3}\right| + C = \frac{1}{30}\ln\left|\frac{\cos 5x - 3}{\cos 5x + 3}\right| + C;$

к) $\int x \cdot \operatorname{tg} x^2 dx = \int \frac{x\sin x^2}{\cos x^2}dx = \begin{vmatrix} t = \cos x^2 \\ dt = -2x\sin x^2 dx \\ x\sin x^2 dx = -\frac{1}{2}dt \end{vmatrix} = -\int \frac{\frac{1}{2}dt}{t} = -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} =$

{для нахождения интеграла применим формулу (3)}

$= -\frac{1}{2}\ln|t| + C = -\frac{1}{2}\ln\left|\cos x^2\right| + C;$

л) $\int \frac{3^x}{9^x+4}dx = \int \frac{3^x}{\left(3^x\right)^2+2^2}dx = \left| \begin{array}{l} t=3^x \\ dt = 3^x \ln 3 dx \\ 3^x dx = \frac{1}{\ln 3}dt \end{array} \right| = \frac{1}{\ln 3}\int \frac{dt}{t^2+2^2} =$

{для нахождения интеграла применим формулу (7)}

$= \frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C = \frac{1}{2\ln 3}\operatorname{arctg}\frac{3^x}{2}+C;$

Найдем интегралы (м – н) методом интегрирования по частям, используя формулу $\int U\cdot V'dx = U\cdot V - \int U'\cdot Vdx$ (13):

м) $\int x^2\cos xdx = \left| \begin{array}{l} U=x^2; \quad U'=2x \\ V'=\cos x;\ V=\sin x \end{array} \right| = x^2\sin x - \int 2x\cdot\sin xdx =$

$= \left| \begin{array}{l} U=2x; \quad U'=2 \\ V'=\sin x; \quad V=-\cos x \end{array} \right| == x^2\cdot\sin x - \left(2x\cdot(-\cos x) - \int 2\cdot(-\cos x)dx\right) =$

{для нахождения интеграла применим формулу (6)}

$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C;$

н)

$\int \arccos x\, dx = \left| \begin{array}{l} U=\arccos x;\ U'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ V'=1; \qquad V=x \end{array} \right| = x\cdot\arccos x - \int x\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

{второе слагаемое вычислим с помощью замены, применив формулу (2)}

$\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left| \begin{array}{l} t=1-x^2 \\ dt=-2xdx \\ -xdx=\frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{1/2}+C = \sqrt{1-x^2}+C$

в итоге получаем $\int \arccos x\, dx = x\cdot\arccos x - \sqrt{1-x^2}+C;$

о) $\int \frac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x}dx$.

Под знаком интеграла правильная рациональная дробь. Разложим её на простейшие дроби:

$$\frac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x} = \frac{x^2+3x+6}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3} =$$

$$= \frac{A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x-3)} =$$

$$= \frac{Ax^2-5Ax+6A+Bx^2-3Bx+Cx^2-2Cx}{x(x-2)(x-3)};$$

Перейдем к равенству числителей:

$x^2+3x+6 = Ax^2-5Ax+6A+Bx^2-3Bx+Cx^2-2Cx$.

Отсюда следует, что

$$\left. \begin{array}{l} x^2:\ 1=A+B+C \\ x^1:\ \ 3=-5A-3B-2C \\ x^0:\ 6=6A \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=1+B+C \\ 8=-3B-2C \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1, \\ B=-8, \\ C=8. \end{cases}$$

Тогда $\frac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x} = \frac{1}{x}-\frac{8}{x-2}+\frac{8}{x-3}$.

Интегрируя почленно полученное равенство и применяя свойства неопределённого интеграла, получим:

$$\int\left(\frac{1}{x}-\frac{8}{x-2}+\frac{8}{x-3}\right)dx=\int\frac{dx}{x}-8\int\frac{dx}{x-2}+8\int\frac{dx}{x-3}=:$$

{для нахождения интегралов применим формулу (3)}

$$=\ln|x|-8\ln|x-2|+8\ln|x-3|+C;$$

п) $\int\frac{x^6}{x^2-x+1}dx$.

Под знаком интеграла неправильная рациональная дробь. Выделим целую часть этой дроби путем деления числителя на знаменатель:

$$\frac{x^6}{x^2-x+1}=x^4+x^3-x-1+\frac{1}{x^2-x+1}$$

Выделим полный квадрат в знаменателе правильной рациональной дроби:

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

Возвращаясь к исходному интегралы, получим:

$$\int\left(x^4+x^3-x-1+\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)dx=\int x^4dx+\int x^3dx-\int xdx-\int 1dx+\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$

{для нахождения первых трёх интегралов применим формулу (2), для четвёртого – формулу (1), последний интеграл найдем с помощью формулы (7)}

$$=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-x+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C;$$

р) $\int\frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}$.

Найдем интеграл используя универсальную тригонометрическую подстановку:

$$\left|\begin{array}{l} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},\\ \frac{x}{2}=\operatorname{arctg}t,\ x=2\operatorname{arctg}t\Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right|$$

$$=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}-2\cdot\frac{2t}{1+t^2}\right)}=\int\frac{1+t^2}{t\left(t^2-4t+3\right)}dt.$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{1+t^2}{t\left(t^2-4t+3\right)}=\frac{1+t^2}{t(t-1)(t-3)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{t-3}=$$

$$=\frac{A(t-1)(t-3)+Bt(t-3)+Ct(t-1)}{t(t-1)(t-3)}$$

Перейдем к равенству числителей:

$$1+t^2=At^2-4At+3A+Bt^2-3Bt+Ct^2-Ct.$$

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{array}{l} t^2:\ 1=A+B+C\\ t^1:\ 0=-4A-3B-C\\ t^0:\ 1=3A\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} A=\frac{1}{3},\\ B=-1,\\ C=\frac{5}{3},\end{array}\right.$$

Тогда $\frac{1+t^2}{t\left(t^2-4t+3\right)}=\frac{1}{3t}-\frac{1}{t-1}+\frac{5}{3(t-3)}$.

Интегрируя почленно полученное равенство, получим::

$$\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dt}{t-1}+\frac{5}{3}\int\frac{dt}{t-3}=$$

{для нахождения интегралов применим формулу (3)}

$$=\frac{1}{3}\ln|t|-\ln|t-1|+\frac{5}{3}\ln|t-3|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|-\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1\right|+\frac{5}{3}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}-3\right|+C;$$

с) $\displaystyle\int\frac{3xdx}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt[4]{3x^2-2}}$.

Произведем замену: $3x^2-2=t,\ dt=6xdx,\ 3xdx=\frac{1}{2}dt.$

Получим: $\displaystyle\int\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}+\sqrt[4]{t}}=$

Наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ есть 4, поэтому введем следующую замену:

$$\left|\begin{array}{l} t=z^4\\ dt=4z^3dz\\ z=\sqrt[4]{t}\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{4z^3dz}{\sqrt{z^4}+\sqrt[4]{z^4}}=2\int\frac{z^2}{z^2+z}dz=2\int\frac{z^2}{z(z+1)}dz=2\int\frac{z}{z+1}dz=$$

$$=2\int\left(1-\frac{1}{z+1}\right)dz=2\int dz-2\int\frac{dz}{z+1}=$$

{для нахождения интегралов применим формулы (1) и (3)}

$$=2z-2\ln|z+1|+C=2\sqrt[4]{3x^2-2}-2\ln\sqrt[4]{3x^2-2}+C;$$

т) $\displaystyle\int\cos 3x\cos 5x dx$.

Найдем интеграл, используя формулу тригонометрических преобразований

$$\cos 3x\cdot\cos 5x=\frac{1}{2}\left(\cos(3x-5x)+\cos(3x+5x)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos(-2x)+\cos 8x\right)=\frac{1}{2}(\cos$$

Интегрируя полученное равенство и применяя формулу (6), получим:

$$\int\frac{1}{2}(\cos 8x+\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}(-\sin 8x)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(-\sin 2x)+C=-\frac{1}{16}\sin 8x-\frac{1}{4}$$

у) $\displaystyle\int\sin^4 x\,dx=\int\left(\sin^2 x\right)^2dx=\left\{\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\right\}=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2dx=$

$$=\int\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}dx=\left\{\cos^2 2x=\frac{1+\cos 4x}{2}\right\}=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right.$$

$$=\frac{1}{4}\int dx-2\cdot\frac{1}{4}\int\cos 2x\,dx+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int\cos 4xdx=$$

$$=\frac{1}{4}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx+\frac{1}{8}\int dx+\frac{1}{8}\int\cos 4xdx==\frac{3}{8}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx+\frac{1}{8}\int\cos 4x$$

{для нахождения интегралов применим формулы (1) и (6)}

$$=\frac{3}{8}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x+C=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C;;$$

ф) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}=:$

$$\left|\begin{array}{l} t=\sqrt{e^{2x}-1}, \\ e^{2x}=t^2+1, \\ x=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right), \\ dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt \end{array}\right| = \int\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt}{t}=\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (7)}

$$=\operatorname{arctg} t+C=\operatorname{arctg}\sqrt{e^{2x}-1}+C.$$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

а) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}}$; б) $\displaystyle\int_0^{4}\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

Решение:

а) Несобственный интеграл I рода.

$$\int_0^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}}=\left|\begin{array}{l} t=x^2+4 \\ dt=2xdx \\ xdx=\frac{1}{2}dt \\ x_1=0\Leftrightarrow t_1=4 \\ x_2=-\infty\Leftrightarrow t_2=\infty \end{array}\right|=\int_4^{\infty}\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}}=\lim_{b\to\infty}\int_4^b\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (2)}

$$=\lim_{b\to\infty}\left(t^{\frac{1}{2}}\Big|_4^b\right)==\lim_{b\to\infty}\left(\sqrt{t}\Big|_4^b\right)=\lim_{b\to\infty}\left(\sqrt{b}-2\right)=\infty$$ - интеграл расходится.

б) Несобственный интеграл II рода.

$x=4$ является точкой разрыва подынтегральной функции, поэтому:

$$\int_0^4\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{4-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{4-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{4^2-x^2}}=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (8)}

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin\frac{x}{4}\Big|_0^{4-\varepsilon}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)-\arcsin 0\right)=\frac{\pi}{2}$$ - интеграл сходится.

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2$ и $y=2-x^2$;

б) длину дуги кривой:

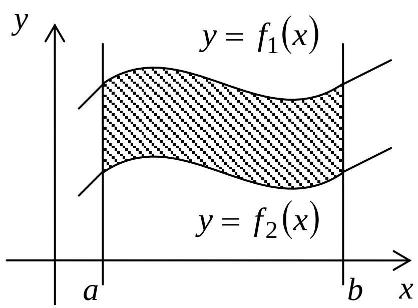
$$\begin{cases} x=3(t-\sin t) \\ y=3(1-\cos t) \end{cases}\qquad 0\le t\le\pi,$$

в) объем тела, полученного вращением фигуры $y=\sin x;\ \ y=0;\ \ 0\le x\le\pi$, вокруг оси Ox.

Решение:

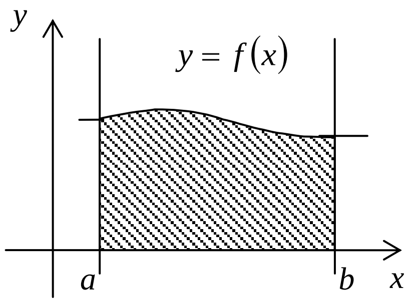
а) Существуют несколько формул для вычисления площадей плоских фигур.

- Площадь фигуры, заданной в декартовой системе координат, ограниченной линиями $y=f_1(x)$ - сверху, $y=f_2(x)$ - снизу, слева прямой $x=a$, справа прямой $x=b$ определяется формулой



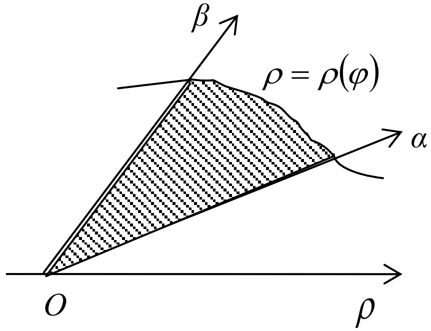
$$S=\int_a^b\left[f_1(x)-f_2(x)\right]dx$$

-



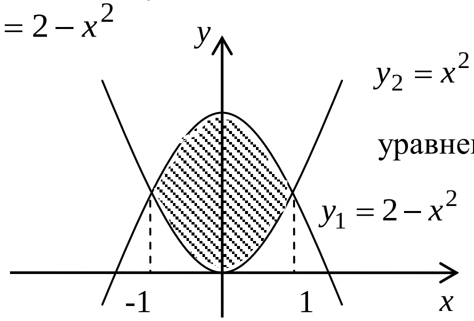
- Площадь фигуры, ограниченной кривой заданной параметрически уравнениями $\left(y = f(x),\ x \in [a;\ b]\right) \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \end{cases}$ $t \in [\alpha;\ \beta]$, определяется формулой $S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t)dt$;

- Площадь фигуры, заданной в полярной системе координат, ограниченной кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, определяется формулой: $S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi$.



В нашем случае линии, ограничивающие фигуру, заданы в декартовых координатах, поэтому мы будем использовать формулу $S = \int\limits_{a}^{b} \left[f_1(x) - f_2(x)\right]dx$

Найдем координаты точек пересечения линий: $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow$



$x^2 = 2 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow$

$x_1 = -1; \quad x_2 = 1 \Rightarrow a = -1; \quad b = 1.$

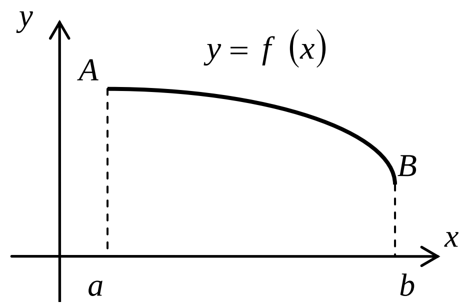
$$S = \int\limits_{-1}^{1}\left(\left(2 - x^2\right) - x^2\right)dx = \int\limits_{-1}^{1}\left(2 - 2x^2\right)dx = 2\int\limits_{-1}^{1}\left(1 - x^2\right)dx =$$

$$= 2\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 2\left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3}\right)\right) = \frac{8}{3};$$

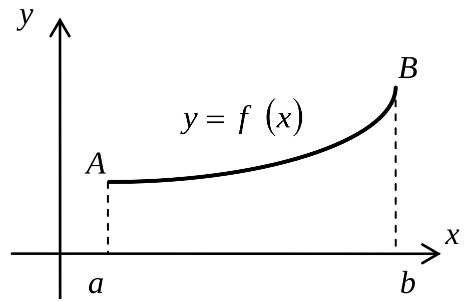
б) В зависимости от способа задания уравнения кривой существуют следующие формулы нахождения длины дуги кривой.

- Для кривой, заданной в декартовых координатах уравнением $y = f(x)$ $x \in [a;\ b]$ длина дуги находится по формуле

$$l_{AB} = \int\limits_{a}^{b}\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}dx;$$



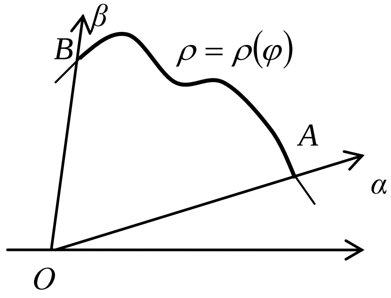
Для кривой, заданной параметрически уравнениями $\left(y = f(x),\ x \in [a;\ b]\right) \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \end{cases}$ $t \in [\alpha;\ \beta]$



длина дуги находится по формуле

$$l_{AB} = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt$$

- Для кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ $\varphi \in [\alpha;\ \beta]$ длина дуги находится по формуле



$$l_{AB} = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2(\varphi) + \left(\rho'(\varphi)\right)^2}d\varphi.$$

В нашем случае кривая задана параметрически, поэтому для вычисления её длины мы применим формулу

$$l_{AB}=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt$$

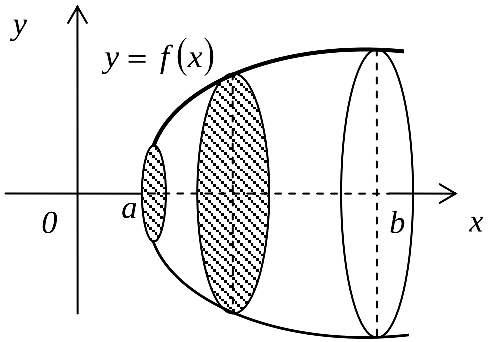
$$\begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(1-\cos t); \end{cases} \quad \begin{cases} x'(t)=3(1-\cos t), \\ y'(t)=3\cdot\sin t. \end{cases}$$

$$l=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{\left(3(1-\cos t)\right)^2+\left(3\sin t\right)^2}\,dt=3\int\limits_0^{\pi}\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=\left\{\cos^2 t+\sin^2 t=1\right\}=$$

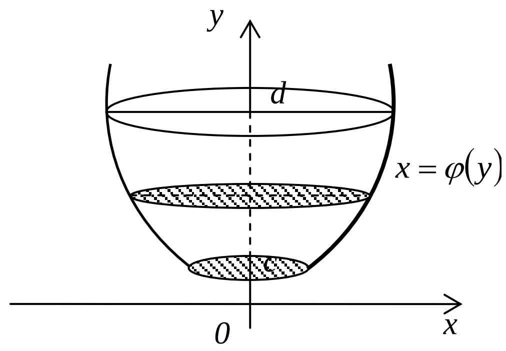
$$=3\int\limits_0^{\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt=3\int\limits_0^{\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=\left\{1-\cos t=2\sin^2\frac{t}{2}\right\}=3\int\limits_0^{\pi}\sqrt{2\cdot 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt=$$

$$=6\int\limits_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=-6\cdot 2\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi}=-12\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=-12\cdot(0-1)=12\,;$$

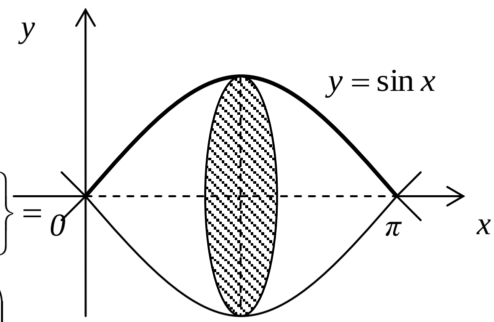
в) Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $x\in[a;b]$. Тогда объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y=f(x)$, снизу Ox, определяется формулой: $V_x=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$.



Если криволинейная трапеция ограниченна графиком непрерывной функции $x=\varphi(y)$ и прямыми $x=0$, $y=c$, $y=d$ $(c<d)$, то объём тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Oy, по аналогии равен: $V_y=\pi\int\limits_c^d \varphi^2(y)dy$.



В условиях нашей задачи $y=\sin x$, $a=0$, $b=\pi$.



$$V_x=-\pi\int\limits_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\left\{\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\right\}=$$

$$=\pi\int\limits_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\frac{\pi}{2}\left(\int\limits_0^{\pi}dx-\int\limits_0^{1}\cos 2x\,dx\right)=$$

.

$$=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}\left(\left(\pi-\frac{1}{2}\sin 2\pi\right)-\left(0-\frac{1}{2}\sin 0\right)\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\pi=\frac{\pi^2}{2}.$$

Вариант 1.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int\left(x^2-2x+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx;$ б) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}};$ в) $\int\frac{x^2}{\left(1+3x^3\right)^2}dx;$

г) $\int\frac{x}{1+3x^2}dx;$ д) $\int\frac{\cos x}{1-2\sin x}dx;$ е) $\int e^{-x^2}xdx;$

ж) $\int\sin 2x\,dx;$ з) $\int\left(\cos\frac{x}{3}+1\right)dx;$ и) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}};$

к) $\int\frac{3^x}{3^{2x}+1}dx;$ л) $\int\frac{dx}{x^2-2x+4};$ м) $\int xe^{-2x}\,dx;$

н) $\int x^2\ln x\,dx;$ о) $\int\frac{2x-1}{x^2-3x+2}dx;$ п) $\int\frac{x^4+2}{x^3+3x}dx;$

р) $\int\frac{dx}{1+3\cos x};$ с) $\int\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx;$ т) $\int\sin x\cos 2x dx;$

у) $\int\cos^2 x\,dx;$ ф) $\int\left(e^x+2\right)^3dx.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x};$ б) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной параболами: $y=\frac{x^2}{2}-x+1$ и $y=-\frac{x^2}{2}+3x+6$

б) длину дуги кривой: $y=\ln x$ от точки с абсциссой $x_1=\frac{3}{4}$ до точки $x_2=2{,}4$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной гиперболой $y=\frac{6}{x}$, осью OY и прямыми $y=1$ и $y=6$.

Вариант 2.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int\left(x^4-\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x^3}-11\right)dx;$ б) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}};$ в) $\int\frac{xdx}{\left(5x^2+1\right)^2};$

г) $\int 7^x\sqrt{3\cdot 7^x+4}dx;$ д) $\int\frac{x^2}{1+3x^3}dx;$ е) $\int\frac{e^{-x}}{e^{-x}+4}dx;$

ж) $\int\sin 5x\,dx;$ з) $\int\frac{dx}{1+3x^2};$ и) $\int tg\,3x\,dx;$

к) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}};$ л) $\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x-3};$ м) $\int(x+3)e^{2x}dx;$

н) $\int x\arccos x\,dx;$ о) $\int\frac{3x^2-1}{x^3-x}dx;$ п) $\int\frac{x^3+1}{x^2-4}dx;$

р) $\int\frac{dx}{2-2\sin x};$ с) $\int\frac{dx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[4]{3x+1}};$ т) $\int\cos 3x\sin 2x dx;$

у) $\int\sin^4 x\cdot\cos x^5\,dx;$ ф) $\int\sqrt{e^x+1}dx.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$; б) $\int_0^\infty \frac{xdx}{x^2+4}$.

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, заключенной между кривой $y=4-x^2$ и осью Ox;

б) длину дуги кривой $y=1-\ln\cos x$ в пределах от $x_1=0$ до $x_2=\frac{\pi}{4}$;

в) объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривыми $y=\frac{2}{1+x^2}$.

Вариант 3.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int\left(x^2-\sqrt[4]{x^3}+\frac{2}{x}-3\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+3}}$; в) $\int\frac{x^2}{\left(1-4x^3\right)^2}dx$;

г) $\int\frac{x\,dx}{x^2+5}$; д) $\int\frac{\cos 3x}{1+\sin 3x}dx$; е) $\int e^{-2x^2}\cdot xdx$;

ж) $\int a^{3x}\,dx$; з) $\int(2+\sin 2x)dx$; и) $\int\frac{\cos(\ln x)}{x}dx$;

к) $\int 2^x tg\, 2^x\,dx$; л) $\int\frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx$; м) $\int xe^x dx$;

н) $\int x\arcsin 5x\,dx$; о) $\int\frac{x^2+2x-2}{x^3-9x}dx$; п) $\int\frac{x^3+1}{x^3-2x}dx$;

р) $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x}$; с) $\int\frac{\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}dx$; т) $\int\cos 4x\cdot\cos 5x\,dx$;

у) $\int\sin^3 x\,dx$; ф) $\int\left(e^x-4\right)^2dx$.

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^\infty e^{-x}dx$; б) $\int_0^1 \ln x dx$.

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной линией $y=x^2-5$, осью Ox и осью Oy $(y<0)$;

б) длину дуги кривой $y=\frac{1}{3}(x-3)\sqrt{x}$ между точками пересечения её с Ox;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y=3x^2+1$ и прямой $y=3x+7$.

Вариант 4.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int\left(1-2\sqrt[3]{x}+\frac{7}{x^4}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+2x}}$; в) $\int\frac{xdx}{\left(3+x^2\right)^3}$;

г) $\int\frac{arctg\,2x}{1+4x^2}dx$; д) $\int\frac{x^2}{1+4x^3}dx$; е) $\int\frac{e^x}{1-2e^x}dx$;

ж) $\int e^{-x^3}x^2dx$; з) $\int\sin 2x\,dx$; и) $\int\frac{dx}{\cos^2 3x}$;

к) $\int \frac{x\,dx}{\sin x^2}$; л) $\int \frac{dx}{5+4x^2}$; м) $\int (x+2)\cos 5x\,dx$;

н) $\int \arcsin 4x\,dx$; о) $\int \frac{x-3}{x^3+8}dx$; п) $\int \frac{x^3-2}{x^3+2x^2+x}dx$;

р) $\int \frac{dx}{2+\sin x}$; с) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}dx$; т) $\int \sin x\cdot\cos 3x\,dx$;

у) $\int \cos^4 x\,dx$; ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+e^x}}$.

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+11}$.

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной кривой $y=x^2-4$ и прямыми $y=0$, $x=-1$ $(x\ge -1)$;

б) длину одной арки циклоиды: $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$;

в) объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y=\frac{1}{4}x^2$, прямой $x=4$ и осью Ox.

Вариант 5.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int \left(x^4-\frac{1}{2}x+\sqrt[3]{3x}\right)dx$; б) $\int \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^5}$; в) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$;

г) $\int \frac{dx}{x+3}$; д) $\int \frac{\cos x}{1+3\sin x}dx$; е) $\int e^{2x}dx$;

ж) $\int 2^{-x^2}xdx$; з) $\int (1-\sin 3x)dx$; и) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$;

к) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$; л) $\int tg\,3x\,dx$; м) $\int (x+5)e^{2x}dx$;

н) $\int x^7\ln x\,dx$; о) $\int \frac{x+2}{x^3-x^2-2x}dx$; п) $\int \frac{x^4-3}{x^2-25}dx$;

р) $\int \frac{dx}{\cos x+3\sin x}$; с) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[4]{3x+1}}$; т) $\int \cos 3x\sin 2x dx$;

у) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx$; ф) $\int \sqrt{4+e^x}\,dx$.

Задание2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_2^{\infty} \frac{xdx}{x^2+4}$; б) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной гиперболой $xy=9$, осью OX и прямыми $x=3$ и $x=6$;

б) длину дуги одного оборота спирали Архимеда $\rho=3\varphi$;

в) объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной полуэллипсом $y=3\sqrt{1-x^2}$, параболой $x=\sqrt{1-y}$ и осью Oy.

Вариант 6.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int\left(2x^7-\frac{3}{\sqrt{x}}+e^x\right)dx$; б) $\int\frac{x^2dx}{\left(1+3x^3\right)^3}$; в) $\int\sqrt{1-5x}dx$;

г) $\int\frac{arctg^2x}{1+x^2}dx$; д) $\int\frac{e^x}{e^x+4}dx$; е) $\int e^{\sin 2x}\cos 2xdx$;

ж) $\int 2^{-x^2}xdx$; з) $\int\frac{dx}{\sin^2 3x}$; и) $\int tg2xdx$;

к) $\int\frac{e^x}{\sin e^x}dx$; л) $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$; м) $\int x\cos 2x\,dx$;

н) $\int 3x^2\ln(x+2)dx$; о) $\int\frac{2-3x}{x^3-4x}dx$; п) $\int\frac{x^3+2}{x^2-2x+3}dx.$

р) $\int\frac{dx}{\sin x-2\cos x}$; с) $\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2-4}+\sqrt[4]{5x^2-4}}$; т) $\int\sin 2x\cdot\cos 7xdx$;

у) $\int\sin^2x\cdot\cos^2xdx$; ф) $\int\left(5+e^x\right)^2dx.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_e^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; б) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(x+1)^4}$.

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной линиями $y=e^x-1$, $y=e^{2x}-3$ и осью Oy;

б) длину дуги кривой $y=\frac{1}{3}x\sqrt{x}$ от $x_1=0$ до $x_2=12$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиком функции $y=\sqrt{\operatorname{arctg}x}$ и прямыми $x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x_2=\sqrt{3}$.

Вариант 7.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int\frac{x^3-2\sqrt{x^3}+3\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}dx$; б) $\int\frac{x^2dx}{\left(1-2x^3\right)^2}$; в) $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$;

г) $\int\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}dx$; д) $\int\frac{x}{4x^2-3}dx$; е) $\int e^{\cos 3x}\sin 3xdx$;

ж) $\int 2^{-3x^2}xdx$; з) $\int\sin\frac{x}{5}dx$; и) $\int\frac{dx}{\cos^2 3x}$;

к) $\int tg(1-x)dx$; л) $\int\frac{2^xdx}{4^x+1}$; м) $\int x\sin 3x\,dx$;

н) $\int x\cdot arctgx\,dx$; о) $\int\frac{x+3}{x^3+10x^2+25x}dx$; п) $\int\frac{x^5+3x^2}{x^2+x}dx$;

р) $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x+\sin x}dx.$ с) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx;$ т) $\int \sin x \cdot \sin 3x dx;$

у) $\int \cos^2 x \cdot \sin^3 x dx;$ ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-9}}.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+8};$ б) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\ln^3 x}.$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+2x$ и прямой $y=x+2$;

б) длину дуги полукубической параболы $ay^2=x^3$ от начала координат до точки с абсциссой $x=5a$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной одной волной синусоиды $y=\sin 4x$ и осью Ox.

Вариант 8.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int\left(2\sqrt{x}-\frac{3}{x^2}+1\right)dx;$ б) $\int\sqrt{2x+3}dx;$ в) $\int\frac{x}{\left(1+4x^2\right)^2}dx;$

г) $\int\frac{dx}{5-x};$ д) $\int\frac{dx}{4x-x\ln x};$ е) $\int xe^{x^2-3}xdx;$

ж) $\int x\cos 2x^2 dx;$ з) $\int\left(1-\sin\frac{x}{5}\right)dx;$ и) $\int ctg\, 2xdx;$

к) $\int\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx;$ л) $\int\frac{xdx}{4+x^4};$ м) $\int e^{2x}\cos xdx;$

н) $\int arctg\, 3x\, dx;$ о) $\int\frac{x^2-x+2}{x^3+4x^2+3x}dx;$ п) $\int\frac{x^2-x+2}{x^3+4x^2+3x}dx;$

р) $\int\frac{dx}{3-2\cos x};$ с) $\int\frac{\sqrt[4]{x}}{1+2\sqrt{x}}dx;$ т) $\int\sin x\cdot\sin 3xdx;$

у) $\int\cos^2\frac{x}{2}dx;$ ф) $\int\sqrt{e^x-3}dx.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_2^4\frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}.$ б) $\int\limits_e^\infty\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}.$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной параболами: $y^2=4x$ и $x^2=4y$;

б) длину дуги полукубической параболы $y=\sqrt{(x-2)^3}$ от точки $A(2;\,0)$ до точки $B(6;\,8)$;

в) объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=4-x^2$, $y=0$, $x=0$ вокруг оси Oy.

Вариант 9.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int\left(2-3\sqrt[5]{x^4}+\frac{1}{x^3}\right)dx;$ б) $\int\frac{xdx}{\left(1+3x^2\right)^5};$ в) $\int\sqrt{1-2x}dx;$

г) $\int\frac{x^2}{1+2x^3}dx;$ д) $\int\frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx;$ е) $\int e^{-x^3}x^2dx;$

ж) $\int\sqrt{3^x}\sqrt{5^x}dx;$ з) $\int\frac{x^3}{\sin^2 x^4}dx;$ и) $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cdot\cos x}dx;$

к) $\int\frac{dx}{\sin^2 4x};$ л) $\int(2-3\cos 2x)dx;$ м) $\int\left(1-x^2\right)\sin 3x\,dx;$

н) $\int\ln\left(x^2+5\right)dx;$ о) $\int\frac{x^2+4x}{x-x^2-2x^3}dx;$ п) $\int\frac{x^4}{1-x^2}dx;$

р) $\int\frac{dx}{a\sin x+3\cos x};$ с) $\int\frac{\sqrt{x}}{4-\sqrt[4]{x}}dx;$ т) $\int\sin 2x\cdot\sin 8x\,dx;$

у) $\int\sin^2 x\cdot\cos^3 x\,dx;$ ф) $\int\frac{dx}{\sqrt{16-e^x}}.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^{\infty}xe^{-x^2}dx;$ б) $\int\limits_0^1\frac{dx}{x+x^2}.$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=2x+5$, $y=\frac{x^2}{6}$;

б) длину дуги кардиоиды $\rho=5(1+\cos\varphi)$;

в) объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной параболой $y=\frac{1}{2}x^2$, прямой $y=4-x$, $x=0$ вокруг оси Oy.

Вариант 10.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int\left(\sqrt{x}-2x^3-\frac{1}{x^2}\right)dx;$ б) $\int(1-\sin 2x)^5\cos 2xdx;$ в) $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}};$

г) $\int\frac{x^3dx}{1+4x^4};$ д) $\int\frac{\sin x}{1+2\cos x}dx;$ е) $\int 2^{-x^3}x^2dx;$

ж) $\int\left(e^x+1\right)^2dx;$ з) $\int e^x\sin e^xdx;$ и) $\int\cos 3xdx;$

к) $\int\frac{dx}{\sin^2(1-x)};$ л) $\int\cos 2x\sin 3xdx;$ м) $\int e^{-2x}(2x+5)dx;$

н) $\int\left(\sin^2 x+1\right)xdx;$ о) $\int\frac{x+4}{x^3-2x^2+3x}dx;$ п) $\int\frac{x^4+x}{27+x^3}dx;$

р) $\int\frac{\cos x}{1+\cos x-\sin x}dx;$ с) $\int\frac{\sqrt{x}}{1+3\sqrt[4]{x}}dx;$ т) $\int\sin 5x\cdot\cos 8x\,dx;$

у) $\int\cos^5 xdx;$ ф) $\int\left(e^x-3\right)^2dx.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$;   б) $\int\limits_2^\infty \frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2+5\right)^3}}$.

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \ln x$ и прямыми $x = e$, $x = e^2$ и $y = 0$;

б) площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox параболы $y^2 = 2x + 1$ от $x_1 = 1$ до $x_2 = 7$;

в) объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугров, Я.С. Высшая математика / Я.С.Бугров, С.М. Никольский. Учеб. для вузов в 3т. –5-е изд., стер. – М.: Дрофа . – (Высшее образование. Современный учебник). Т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление. – 2003. – 509 с.
2. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализ / Г.Н. Берман. Учеб. пособие. 22-е изд., перераб. – СПб: Профессия, 2003. – 432 с.
3. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах (с решениями) / Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. в 2 ч. –6-е изд. – М.: ОНИКС 21 век, ч .2. –2002. –416 с.
4. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н.С. Пискунов. Учеб. пособие: в 2-х т. – Изд. стер. –М.: Интеграл – Пресс. Т.1. –2001. – 415 с.
5. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике / Д.Т. Письменный. 1 часть. – 2-е изд., испр. – М.: Айрис –пресс, 2002. – 288 с.: ил.

Ахполова З.А., Кокоева З.Т., Дзарахохов А.В.

МАТЕМАТИКА

ИНТЕГРАЛЫ

Учебно-методическое- пособие
для обучающихся по образовательным
программам среднего профессионального образования

Лицензия: ЛР. № 020574 от 6 мая 1998 г.
Электронная версия
Бумага формат А4. Усл. печ. л. 6.37.

362040, Владикавказ, ул. Кирова, 37.
Типография ФГБОУ ВО Горский ГАУ