

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ГОРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

ИНТЕГРАЛЫ

Учебно- методическое пособие
для обучающихся по образовательным
программам среднего профессионального
образования

Владикавказ 2023

УДК 517
ББК 22.161.1

Составители:

Ахполова З.А., Кокоева З.Т., Дзарахохов А.В.

Рецензенты:

Бароев Т.Р. – доктор технических наук, профессор.

Худалов М.З. - кандидат физико-математических наук, доцент.

Математика. Интегралы: учебно- методическое пособие /
Составители: З.А. Ахполова, З.Т. Кокоева, А.В. Дзарахохов. –
Владикавказ: ФГБОУ ВО Горский ГАУ, 2023.- 98с.

Каждый параграф содержит краткое изложение теоретических вопросов, необходимых для решения последующих задач, а также достаточно большое количество решенных примеров и задач. В пособии подобраны задания для аудиторных занятий и самостоятельной (внеаудиторной) работы студентов. В пособии имеются задания для контрольной работы, которые можно использовать и для типового расчета. Предназначено для обучающихся по образовательным программам среднего профессионального образования

©Издательство ФГБОУ ВО
Горский ГАУ, 2023

В настоящем пособии кратко, но доступно излагается материал по рядам, входящий в программу по высшей математике для студентов нетехнических вузов. В нем указано, в какой последовательности надо изучать рекомендуемую литературу, какие задачи необходимо решать. Каждый раздел содержит основной теоретический материал, примеры с краткими методическими указаниями и решениями, а также задачи, которые рекомендуются к самостоятельному решению.

Так как в результате изучения дисциплины математика студент должен овладеть следующими компетенциями:

- владеть культурой мышления, быть способным к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения (ОК-1);
- уметь логически верно, аргументировано и ясно строить устную и письменную речь, быть способным в письменной и устной речи правильно (логически) оформить результаты мышления (ОК-2);
- стремиться к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства, приобретать новые знания в области техники и технологии, математики, естественных, гуманитарных, социальных и экономических наук (ОК-7)
- быть способным и готовым использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ПК-1)
- владение культурой мышления, знание его общих законов, способность в письменной и устной речи логически правильно оформить его результаты (ОК-3);
- способность и готовность приобретать с большой степенью самостоятельности новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии (ОК-4);
- способность применять математический аппарат, необходимый для осуществления профессиональной деятельности (ОК-15)

ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Первообразная функция и её свойства
2. Понятие неопределённого интеграла
3. Свойства неопределённого интеграла
4. Таблица основных неопределённых интегралов

§ 2. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1. Непосредственное интегрирование
2. Интегрирование подстановкой
3. Интегрирование по частям
4. Интегрирование рациональных дробей
 - 4.1. Интегрирование простых дробей
 - 4.2. Разложение рациональной дроби на сумму простых дробей
5. Интегрирование тригонометрических выражений
6. Интегрирование некоторых видов иррациональных выражений
7. Контрольные вопросы
8. Задания для самостоятельного решения

§ 3. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Задача, приводящая к определённому интегралу
2. Геометрический смысл определённого интеграла
3. Свойства определённого интеграла
4. Вычисление определённого интеграла.
 - 4.1. Интеграл с переменным верхним и постоянным нижним пределами и его свойства
 - 4.2. Формула Ньютона–Лейбница
5. Методы интегрирования определённого интеграла
 - 5.1. Замена переменной в определённом интеграле
 - 5.2. Интегрирование по частям в определённом интеграле
6. Приложения определённого интеграла
 - 6.1. Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольной системе координат
 - 6.2. Вычисление площади плоской фигуры в полярной системе координат
 - 6.3. Вычисление объёма тела по площадям параллельных сечений
- 6.4. Вычисление объёма тела вращения

7. Контрольные вопросы
8. Задания для самостоятельного решения

§ 4. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Интегралы с бесконечными пределами
2. Интегралы от разрывных функций
3. Задания для самостоятельного решения
4. Контрольные вопросы

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

§ 1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Первообразная функция и её свойства

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если в каждой точке этого промежутка функция $F(x)$ дифференцируема и выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Пример 1. Функция $F(x) = \sin x$ является первообразной функции $f(x) = \cos x$ на бесконечном промежутке $(-\infty; +\infty)$, так как $F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$ для $x \in (-\infty; +\infty)$.

Нетрудно убедиться, что функции $F_1(x) = \sin x + 3$ и $F_2(x) = \sin x - 7$ также являются первообразными функции $f(x) = \cos x$ для всех $x \in (-\infty; +\infty)$, т.е. если для функции $f(x)$ на некотором промежутке существует первообразная функции, то она не является единственной.

Множество всех первообразных для данной функции $f(x)$ есть множество, которое задаётся формулой $F(x) + C$, где C – любая постоянная величина.

Теорема 1 (об общем виде первообразной). Если $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$. Тогда множество всех первообразных для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$ будут представлены в виде $F(x) + C$, где $C = \text{const.}$.

$F(x) + C$, где $C = \text{const.}$ Такая форма записи первообразной называется общи вида первообразной.

2. Понятие неопределённого интеграла

Определение 2. Множество всех первообразных для данной функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$ называется неопределённым интегралом функции $f(x)$ на этом интервале и обозначается символом:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

В обозначении $\int f(x)dx$ знак \int называется знаком интеграла, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, $f(x)$ – подынтегральной функцией, x – переменной интегрирования. [3]

Теорема 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $(a; b)$, то она имеет на промежутке $(a; b)$ первообразную и неопределённый интеграл.

Замечание. Операция нахождения неопределённого интеграла от данной функции $f(x)$ на некотором промежутке носит название интегрирования функции $f(x)$.

Действие интегрирования является обратным действием дифференцирования.

3. Свойства неопределённого интеграла

Из определении первообразной $F(x)$ и неопределённого интеграла от данной функции $f(x)$ на некотором промежутке, следуют свойства:

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$.
2. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.
3. $\int dF(x) = F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.
4. $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$, где $k = \text{const.}$
5. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$

Замечание. Все свойства верны при условии, что интегралы, фигурирующие в них, рассматриваются на одном и том же промежутке и существуют.

4. Таблица основных неопределённых интегралов

1. $\int 0 \cdot dx = C$.
2. $\int dx = x + C$.
3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$.

$$4. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$$

$$5. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$6. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$7. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$8. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$10. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

$$12. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C.$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C, \quad a > 0, \quad -a < x < a.$$

$$15. \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a > 0; \quad x \neq \pm a.$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| + C.$$

где C – произвольная постоянная.

Замечание. Интеграл, взятый не от любой элементарной функции, является элементарной функцией. Примерами могут служить следующие интегралы, часто встречающиеся в задачах:

$$\int e^{-x^2} dx \text{ – интеграл Пуассона,}$$

$$\int \cos x^2 dx, \int \sin x^2 dx \text{ – интегралы Френеля,}$$

$$\int \frac{dx}{\ln x} (0 < x \neq 1) \text{ – интегральный логарифм,}$$

$$\int \frac{\cos x}{x} dx, \int \frac{\sin x}{x} dx \quad (x \neq 0) \text{ – интегральный косинус и синус.}$$

§ 2. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1. Непосредственное интегрирование

а) Работа с таблицей: предложенный интеграл оказался одним из табличных интегралов.

Пример 1.

$$1. \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} + C$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{4+x^2} \right| + C$$

б) Метод разложения: предложенный интеграл после применения линейных свойств (4) и (5) неопределённого интеграла меняется на алгебраическую сумму табличных интегралов.

Пример 2.

$$\begin{aligned} \int \left(7\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} \right) dx &= 7 \cdot \int \sqrt[3]{x^2} dx - 2 \cdot \int \frac{dx}{x} + 4 \cdot \int \frac{dx}{x^2} = \\ &= 7 \cdot \int x^{\frac{2}{3}} dx - 2 \ln |x| + 4 \cdot \int x^{-2} dx = 7 \cdot \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - 2 \ln |x| + 4 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C = \\ &= \frac{21}{5} \sqrt[3]{x^5} - 2 \ln |x| - \frac{4}{x} + C \end{aligned}$$

$$\text{ОТВЕТ: } \int \left(7\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} \right) dx = \frac{21}{5} \sqrt[3]{x^5} - 2 \ln |x| - \frac{4}{x} + C.$$

Пример 3.

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx - \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C$$

$$\text{ОТВЕТ: } \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C.$$

Пример 4.

$$\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1 - \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos x dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x + C$$

$$\text{ОТВЕТ: } \int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x + C$$

в) Подведение под знак дифференциала: предложенный интеграл удастся свести к табличному интегралу с помощью изменения переменной интегрирования или за счёт преобразований под знаком дифференциала. При этом используют следующие формулы:

$$d(\varphi(x)) = \varphi'(x) dx;$$

$$\frac{dx}{x} = d(\ln x); \quad \frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right); \quad d(\sin x) = \cos x dx;$$

$$d(\cos x) = -\sin x dx; \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x); \quad \frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x);$$

$$dx = \frac{1}{a} d(ax+b); \quad x dx = \frac{1}{2} d(x^2) \text{ и т.д.}$$

Далее равенство справедливо для любой дифференцируемой функции $u = \varphi(x)$.

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

$$\int f(u) du = F(u) + C$$

Пример 5.

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d \cos x}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C$$

ОТВЕТ: $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C$.

Пример 6.

$$\int (2x-7)^{10} dx = \frac{1}{2} \int (2x-7)^{10} \cdot d(2x-7) = \frac{1}{2} \frac{(2x-7)^{11}}{11} + C = \frac{1}{22} (2x-7)^{11} + C$$

ОТВЕТ: $\int (2x-7)^{10} dx = \frac{1}{22} (2x-7)^{11} + C$.

Пример 7.

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{9-x^4}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{\sqrt{3^2-(x^2)^2}} = \frac{1}{2} \cdot \arcsin \frac{x^2}{3} + C$$

ОТВЕТ: $\int \frac{x dx}{\sqrt{9-x^4}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{3} + C$.

Пример 8.

$$\int \frac{e^x dx}{7-5e^x} = -\frac{1}{5} \int \frac{d(7-5e^x)}{7-5e^x} = -\frac{1}{5} \ln |7-5e^x| + C$$

ОТВЕТ: $\int \frac{x dx}{\sqrt{9-x^4}} = -\frac{1}{5} \ln |7-5e^x| + C$.

Пример 9.

$$\int \frac{dx}{x(\ln^2 x + 1)} = \int \frac{d \ln x}{\ln^2 x + 1} = \operatorname{arctg}(\ln x) + C$$

ОТВЕТ: $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x + 1)} = \operatorname{arctg}(\ln x) + C$.

2. Интегрирование подстановкой

При подстановке (или замена переменной) пользуемся следующим правилом.

Если не удаётся найти интеграл $f(x)$ непосредственно, то можно выбрать такую функцию $x = \varphi(t)$, удовлетворяющую условиям:

- 1) $\varphi(t)$ непрерывна при $t \in (\alpha; \beta)$, соответствующем интервалу $x \in (a; b)$,
- 2) дифференцируемая при $t \in (\alpha; \beta)$;
- 3) имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$,

чтобы

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt, \quad t = \varphi^{-1}(x)$$

стал табличным или более простым. Иногда для упрощения интеграла можно сделать замену $t = \psi(x)$. [4]

Пример 10.

$$\int \frac{dx}{4+9x^2} = \int \frac{dx}{2^2+(3x)^2} = \left[\begin{array}{l} \text{Замена} \\ t=3x \\ x=\frac{t}{3}; dx=\frac{dt}{3} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{dt}{3}}{2^2+t^2} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{2^2+t^2} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{3x}{2} + C$$

ОТВЕТ: $\int \frac{dx}{4+9x^2} = \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{3x}{2} + C$.

Пример 11.

$$\int x \sqrt{x+1} dx = \left[\begin{array}{l} \text{Замена} \\ \sqrt{x+1} = t; dx = 2t dt \\ x = t^2 - 1 \end{array} \right] = \int (t^2 - 1)t \cdot 2t dt = 2 \int (t^4 - t^2) dt =$$

$$= 2 \int t^4 dt - 2 \int t^2 dt = \frac{2t^5}{5} - 2 \cdot \frac{t^3}{3} + C = \frac{2(\sqrt{x+1})^5}{5} - \frac{2(\sqrt{x+1})^3}{3} + C.$$

Ответ: $\int x\sqrt{x+1}dx = \frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + C.$

Пример 12.

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{4x} - 5} dx = \left[\begin{array}{l} \text{Замена} \\ e^{2x} = t; \\ 2e^{2x} dx = dt; e^{2x} dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - 5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{5}}{t + \sqrt{5}} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{5}} \ln \left| \frac{e^{2x} - \sqrt{5}}{e^{2x} + \sqrt{5}} \right| + C.$$

Ответ: $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x} - 5} dx = \frac{1}{4\sqrt{5}} \ln \left| \frac{e^{2x} - \sqrt{5}}{e^{2x} + \sqrt{5}} \right| + C.$

Пример 13.

$$\int \sqrt{9-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} \text{Замена} \\ x = 3 \sin t \Rightarrow t = \arcsin \frac{x}{3} \\ dx = 3 \cos t dt \end{array} \right| = \int \sqrt{9-9\sin^2 t} \cdot 3 \cos t dt =$$

$$= \int 3\sqrt{1-\sin^2 t} \cdot 3 \cos t dt = 9 \int \cos t \cdot \cos t dt = 9 \int \cos^2 t dt = 9 \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt =$$

$$= \frac{9}{2} \int dt + \frac{9}{2} \int \cos 2t dt = \frac{9}{2} t + \frac{9}{4} \int \cos 2t d(2t) = \frac{9}{2} t + \frac{9}{4} \sin 2t + C =$$

$$= \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + \frac{9}{2} \sin t \cdot \cos t + C = \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + \frac{9}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \sqrt{1-\sin^2 t} + C =$$

$$= \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + \frac{3}{2} x \cdot \sqrt{1-\frac{x^2}{9}} + C = \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + \frac{x\sqrt{9-x^2}}{2} + C.$$

Ответ: $\int \sqrt{9-x^2} dx = \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + \frac{x\sqrt{9-x^2}}{2} + C.$

3. Интегрирование по частям

Функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы на некотором интервале $(a;b)$. И на интервале $(a;b)$ функция $v(x) \cdot u'(x)$ имеет первообразную. Тогда на интервале $(a;b)$ функция $u(x) \cdot v'(x)$ также имеет первообразную. При этом справедливо равенство:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) dx.$$

или

$$\int u dv = u \cdot v - \int v \cdot du.$$

Последнее соотношение называется формулой интегрирование по частям.

Замечание: Для вычисления интеграла необходимо разбить подынтегральное выражение на два множителя $u(x)$ и $dv(x)$ так, чтобы интеграл $\int v \cdot du$ оказался легко интегрируемым.

Типы интегралов для которых применима формула интегрирования по частям, может быть разбита на следующие три группы.

1. Интегралы

вида

$\int P(x)e^{ax} dx, \int P(x)\sin(ax) dx, \int P(x)\cos(ax) dx,$ где $P(x)$ – многочлен, a – число, $a \neq 0$. Удобно положить $u = P(x)$, а за dv обозначить все остальные сомножители подынтегрального выражения, то есть

$$dv = \begin{cases} e^{ax} dx, \\ \sin(ax) dx, \\ \cos(ax) dx. \end{cases}$$

В данном случае формула $\int u dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ применяется столько раз, какова степень многочлена $P(x)$.

2. Интегралы

вида $\int P(x) \arcsin x dx$, $\int P(x) \arccos x dx$, $\int P(x) \arctg x dx$, $\int P(x) \text{arcctg} x dx$, $\int P(x) \ln x dx$. В таких интегралах удобно положить $dv = P(x) dx$, а за u обозначить остальные сомножители, то есть

$$u = \begin{cases} \arcsin x, \\ \arccos x, \\ \arctg x, \\ \text{arcctg} x, \\ \ln x. \end{cases}$$

3. Интегралы вида $\int e^{ax} \cdot \sin(bx) dx$, $\int e^{ax} \cdot \cos(bx) dx$, где a и b — числа. В таком случае за u можно принять функцию $u = e^{ax}$ или $u = \sin(bx)$ ($u = \cos(bx)$). Формула интегрирования по частям будет применяться два раза. В повторном интегрировании по частям за u необходимо принять аналогичную в первом применении функцию. В таком случае получается уравнение относительно данного по условию интеграла, из которого легко найти этот интеграл. При неудачном выборе u и dv в повторном интегрировании получается бесполезное тождество. [3]

Пример 14.

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \arctg x dx &= \left[\begin{array}{l} u = \arctg x; \quad dv = x^2 dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2}; \quad v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right] = \frac{x^3}{3} \arctg x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= \frac{x^3}{3} \arctg x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2} dx = \left[-\frac{x^3+x}{-x} \mid \frac{x^2+1}{x} \right] = \frac{x^3}{3} \arctg x - \frac{1}{3} \int \left(x - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \\ &= \frac{x^3}{3} \arctg x - \frac{1}{3} \int x dx + \frac{1}{3} \int \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{x^3}{3} \arctg x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \\ &= \frac{x^3}{3} \arctg x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6} \ln |x^2+1| + C \end{aligned}$$

Ответ: $\int x^2 \cdot \arctg x dx = \frac{x^3}{3} \arctg x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6} \ln |x^2+1| + C$

Пример 15.

$$\begin{aligned} \int x^3 \ln x dx &= \left[\begin{array}{l} u = \ln x \\ dx = x^3 dx \\ du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right] = \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \\ &= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C. \end{aligned}$$

Ответ: $\int x^3 \ln x dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C$

Пример 16.

$$\int x \cdot \sin x dx = \left[\begin{array}{l} u = x \\ dx = \sin x dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = dx \\ v = -\cos x \end{array} \right] = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

Пусть $\int e^x \cos 2x dx = J$, тогда уравнение запишется в виде:

ОТВЕТ: $\int x \cdot \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C$.

Пример 17.

$$\int x^2 \cdot e^x dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = e^x dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = 2x dx \\ v = e^x \end{array} \right] = x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = x \\ dv = e^x dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = dx \\ v = e^x \end{array} \right] = x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

ОТВЕТ: $\int e^x \cos 2x dx = \frac{1}{5}(2 \sin 2x + \cos 2x)e^x + C$

Пример 19.

ОТВЕТ: $\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$.

Пример 18.

$$\int e^x \cos 2x dx = \left[\begin{array}{l} u = e^x \\ dv = \cos 2x dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = e^x dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right] = \frac{1}{2} e^x \sin 2x - \frac{1}{2} \int e^x \sin 2x dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = \sin(\ln x) \\ dv = dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \\ v = x \end{array} \right] = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = e^x \\ dv = \sin 2x dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = e^x dx \\ v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right] = \frac{1}{2} e^x \sin 2x - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{2} \int e^x \cos 2x dx \right) = \int \cos(\ln x) dx = J$$

тогда получаем уравнение вида:

$$J = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - J$$

$$2J = x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x))$$

$$J = \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)).$$

$$= \frac{1}{2} e^x \sin 2x + \frac{1}{4} e^x \cos 2x - \frac{1}{4} \int e^x \cos 2x dx$$

Далее необходимо решить уравнение:

$$\int e^x \cos 2x dx = \frac{1}{2} e^x \sin 2x + \frac{1}{4} e^x \cos 2x - \frac{1}{4} \int e^x \cos 2x dx.$$

ОТВЕТ: $\int \cos(\ln x) dx = \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C$.

4. Интегрирование рациональных дробей

4.1. Разложение рациональной дроби на сумму простых дробей

Определение 1. Рациональной дробью называется отношение двух многочленов:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{c_0x^m + c_1x^{m-1} + \dots + c_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n}$$

Определение 2. Рациональная дробь называется правильной, если $m < n$. В противном случае (если $m \geq n$) она называется неправильной.

Определение 3. Простыми рациональными дробями называются дроби следующих четырех типов:

I. $\frac{A}{x-a}$ ($A, a = \text{const}, A, a \in R$),

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$ ($A, a, k = \text{const}, A, a \in R, k \in N, k \geq 2$),

III.

$$\frac{Mx + F}{x^2 + px + q} \quad (M, F, p, q = \text{const}, p^2 - 4q < 0, M, F, p, q \in R),$$

IV.

$$\frac{Mx + F}{(x^2 + px + q)^k} \quad (M, F, p, q, k = \text{const}, p^2 - 4q < 0, M, f, p, q \in R, k \in N, k \geq 2)$$

Теорема 3. Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы целой части (многочлена) и правильной рациональной дроби.

Пример 20. Представить дробь $\frac{x^4 - 2x^2 + 5}{x^2 + 1}$ в виде суммы целой части и правильной рациональной дроби.

Так как высшая степень числителя равна 4, а знаменателя – 2, то данная дробь неправильная ($4 > 2$). Разделим числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r} x^4 - 2x^2 + 5 \mid x^2 + 1 \\ \underline{-x^2 - 1} \\ -3x^2 + 5 \\ \underline{-(-3x^2 - 3)} \\ 8 \end{array}$$

Следовательно, дробь можно записать в виде:

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 5}{x^2 + 1} = (x^2 - 3) + \frac{8}{x^2 + 1}.$$

Ответ: $\frac{x^4 - 2x^2 + 5}{x^2 + 1} = (x^2 - 3) + \frac{8}{x^2 + 1}.$

Теорема 4. Любую правильную рациональную дробь можно единственным образом представить в виде суммы конечного числа простых рациональных дробей.

Разложение правильной рациональной дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ ($m < n$) на сумму простых дробей можно выполнить по следующей схеме:

Найти корни многочлена $Q_n(x)$ и представить его в виде произведения простых множителей:

$$Q_n(x) = b_0(x - a_1)^{k_1} \dots (x - a_r)^{k_r} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots \rightarrow (x^2 + p_sx + q_s)^{l_s}$$

,

где $a_i \neq a_j, 1 \leq i, j \leq r$

$$p_i^2 - 4q_i < 0, (p_i; q_i) \neq (p_j; q_j), 1 \leq i; j \leq S$$

$$k_i \in N, 1 \leq i \leq r$$

$$l_i \in N, 1 \leq i \leq S$$

Записать разложение дроби с неопределёнными коэффициентами:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_{r1}}{(x-a_r)^{k_2}} + \dots + \frac{A_{rk_r}}{(x-a_r)^{k_r}} + \frac{M_{11}x + F_{11}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + \dots + \frac{M_{s1}x + F_{s1}}{(x^2 + p_sx + q_s)^{l_s}} + \dots + \frac{M_{sl_s}x + F_{sl_s}}{(x^2 + p_sx + q_s)^{l_s}}$$

Определить коэффициенты

$$A_{11}, \dots, A_{rk_r}, M_{11}, \dots, M_{sl_s}, F_{11}, \dots, F_{sl_s}$$

Суммарное число которых равно n , методом неопределённых коэффициентов.

Для этого необходимо всё разложение привести к общему знаменателю и приравнять числитель полученной дроби к $P_m(x)$. Приравнявая в этих многочленах коэффициенты при одинаковых степенях x , получим систему из n линейных уравнений с n неизвестными. Эта система имеет единственное решение – искомые коэффициенты.

Пример 21. Разложить дробь $\frac{43x^2 - 5x - 14}{x^3 + x^2 - 2x}$ на сумму простых дробей.

1) Данная дробь правильная. Разложим знаменатель на множители:

$$x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = x(x-1)(x+2).$$

2) Запишем разложение данной дроби на сумму простых дробей:

$$\frac{43x^2 - 5x - 14}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{43x^2 - 5x - 14}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

3) Для нахождения коэффициентов A , B и C приводим разложение дроби к общему знаменателю и приравняем числители дробей.

$$A(x^2 + x - 2) + B(x^2 + 2x) + C(x^2 - x) = 43x^2 - 5x - 14$$

$$x^2(A + B + C) + x(A + 2B - C) + (-2A) = 43x^2 - 5x - 14$$

$$\begin{cases} A + B + C = 43 \\ A + 2B - C = -5 \\ -2A = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B + C = 36 \\ 2B - C = -12 \\ A = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3B = 24 \Rightarrow B = 8 \\ C = 36 - 8 \Rightarrow C = 28 \end{cases}$$

Следовательно, дробь можно записать в виде:

$$\frac{43x^2 - 5x - 14}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{7}{x} + \frac{8}{x-1} + \frac{28}{x+2}.$$

Ответ: $\frac{43x^2 - 5x - 14}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{7}{x} + \frac{8}{x-1} + \frac{28}{x+2}.$

4.2. Интегрирование простых дробей

Задача интегрирования рациональной дроби сводится к умению интегрирования только правильных рациональных дробей, так как интегрирование целой части дроби (многочлена) – задача не сложная. Если решена задача разложения правильной дроби на сумму простых дробей, то дальше надо уметь интегрировать простые дроби. Покажем, как интегрировать простые дроби (четыре типа). [2]

I тип. $\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln|x-a| + C$

II тип.

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = \frac{A(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{-A}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C$$

$(k \in N, k \geq 2)$

$$\begin{aligned} \text{III тип. } \int \frac{Mx+F}{X^2+px+q} dx &= \int \frac{Mx+F}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx = \left[\begin{array}{l} \text{Замена} \\ x + \frac{p}{2} = t \\ x = t - \frac{p}{2}; dx = dt \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{M\left(t - \frac{p}{2}\right) + F}{t^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} dt = \int \frac{Mt}{t^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} dt + \left(F - M \cdot \frac{p}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{d\left(t^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right)}{t^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} + \frac{F - M \cdot \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} = \\ &= \frac{M}{2} \ln \left| t^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) \right| + \frac{F - M \cdot \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C = \\ &= \frac{M}{2} \ln |x^2 + px + q| + \frac{F - M \cdot \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C \end{aligned}$$

Интегрирование дроби IV типа проводится аналогично интегрированию дроби III типа.

Пример 22. Найти интеграл от дроби III типа:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-5}{x^2-4x+13} dx &= \int \frac{3x-5}{(x^2-4x+4)+9} dx = \int \frac{3x-5}{(x-2)^2+9} dx = \\ & \quad (D = 16 - 52 < 0 \Rightarrow \text{дробь III типа}) \\ &= \left[\begin{array}{l} \text{Замена} \\ x - 2 = t \\ x = t + 2 \\ dx = dt \end{array} \right] = \int \frac{3(t+2)-5}{t^2+9} dt = \int \frac{3t+1}{t^2+9} dt = \int \frac{3t}{t^2+9} dt + \int \frac{dt}{t^2+9} = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{d(t^2+9)}{t^2+9} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} = \frac{3}{2} \ln |t^2+9| + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \\ &= \frac{3}{2} \ln |(x-2)^2+9| + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{3} + C = \frac{3}{2} \ln |x^2-4x+13| + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{3} + C \end{aligned}$$

•
Ответ: $\int \frac{3x-5}{x^2-4x+13} dx = \frac{3}{2} \ln |x^2-4x+13| + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{3} + C$.

Пример 23. Найти интеграл от дроби IV типа:

$$\begin{aligned} \int \frac{(5x-1)dx}{(x^2+2x+2)^2} &= \int \frac{(5x-1)dx}{((x^2+2x+1)+1)^2} = \int \frac{(5x-1)dx}{((x+1)^2+1)^2} = \left[\begin{array}{l} \text{Замена} \\ x+1=t \\ x=t-1 \\ dx=dt \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{5t-6}{(t^2+1)^2} dt = 5 \int \frac{tdt}{(t^2+1)^2} - 6 \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{5}{2} \int \frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^2} - 6 \int \frac{1+t^2-t^2}{(t^2+1)^2} dt = \\ &= \frac{5}{2} \left(-\frac{1}{t^2+1} \right) - 6 \int \frac{dt}{t^2+1} + 6 \int \frac{t^2 dt}{(t^2+1)^2} = \left[\begin{array}{l} u=t \\ dv = \frac{tdt}{(t^2+1)^2} \\ v = -\frac{1}{2(t^2+1)} \end{array} \right] = \end{aligned}$$

$$= -\frac{5}{2(t^2+1)} - 6\arctg t + 6\left(-\frac{t}{2(t^2+1)} + \int \frac{dt}{2(t^2+1)}\right) = -\frac{5}{2(t^2+1)} - 6\arctg t - \frac{3t}{t^2+1} +$$

$$+ 3\arctg t + C = -\frac{6t+5}{2(t^2+1)} - 3\arctg t + C = -\frac{6x+11}{2(x^2+2x+2)} - 3\arctg(x+1) + C.$$

Ответ: $\int \frac{(5x-1)dx}{(x^2+2x+2)^2} = -\frac{6x+11}{2(x^2+2x+2)} - 3\arctg(x+1) + C.$

Итак, любая рациональная дробь интегрируема. Для этого необходимо выполнить следующие шаги:

1) Выделить целую часть дроби, если дробь является неправильной, т.е. представить в виде:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = T_{m-n}(x) + \frac{R_r(x)}{Q_n(x)},$$

где $T_{m-n}(x)$ и $R_r(x)$ – многочлены степени $m-n$ и r соответственно (причём $r < n$).

2) Разложить правильную рациональную дробь $\frac{R_r(x)}{Q_n(x)}$ на сумму простых дробей.

3) Вычислить интегралы от многочлена $T_{m-n}(x)$ и каждой из простых дробей, полученных на шаге 2).

Пример 24. Найти интеграл $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2} dx$

1) Дробь $\frac{x^4+1}{x^3-x^2}$ – неправильная рациональная дробь. Выделим целую часть:

$$-\frac{x^4+1}{x^4-x^3} \Big| \frac{x^3-x^2}{x+1}$$

$$-\frac{x^3+1}{x^3-x^2}$$

$$\frac{x^2+1}{x^2+1}$$

Поэтому можно записать:

$$\frac{x^4+1}{x^3-x^2} = x+1 + \frac{x^2+1}{x^3-x^2}.$$

2) Полученную правильную дробь $\frac{x^2+1}{x^3-x^2}$ разложим на сумму простых дробей:

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2} = \frac{x^2+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} = \frac{Ax-A+Bx^2-Bx+Cx^2}{x^2(x-1)}$$

$$x^2+1 = (B+C)x^2 + (A-B)x - A$$

$$\begin{matrix} x^2 \\ x \\ x^0 \end{matrix} \begin{cases} B+C=1 \\ A-B=0 \\ -A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=-1 \\ C=2 \end{cases}$$

Отсюда следует: $\frac{x^2+1}{x^3-x^2} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1}.$

Значит, подынтегральную рациональную дробь можем представить в виде:

$$\frac{x^4+1}{x^3-x^2} = x+1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1}.$$

3) Найдём интеграл:

$$\int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2} dx = \int \left(x + 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} \right) dx = \int x dx + \int dx - \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x} + 2 \int \frac{dx}{x-1} = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{x} - \ln|x| + 2 \ln|x-1| + C.$$

Ответ: $\int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2} dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{x} - \ln|x| + 2 \ln|x-1| + C.$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \int \sin^2 2x \cdot \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x + \cos 2x - \cos 4x \cdot \cos 2x) dx = \\ &= \frac{1}{16} \int dx - \frac{1}{64} \int \cos 4x d(4x) + \frac{1}{32} \int \cos 2x d(2x) - \frac{1}{32} \int (\cos 2x + \cos 6x) dx = \\ &= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{32} \sin 2x - \frac{1}{64} \sin 2x - \frac{1}{192} \sin 6x + C = \\ &= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{64} \sin 2x - \frac{1}{192} \sin 6x + C. \end{aligned}$$

Ответ:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{64} \sin 2x - \frac{1}{192} \sin 6x + C.$$

Пример 26. Вычислить интеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^6 x}{\cos x} dx &= \int \frac{\sin^6 x}{\cos^2 x} \cdot \cos x dx = \int \frac{\sin^6 x \cdot d(\sin x)}{\cos^2 x} = \left[\begin{array}{l} \text{Замена} \\ t = \sin x \\ dt = d \sin x \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{t^6 dt}{1-t^2} = -\int (t^4 + t^2 + 1) dt - \int \frac{dt}{t^2 - 1} = -\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} - t - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \\ &= -\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^3 x}{3} - \sin x - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

Ответ: $\int \frac{\sin^6 x}{\cos x} dx = -\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^3 x}{3} - \sin x - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + C.$

Пример 27. Вычислить интеграл:

5. Интегрирование тригонометрических выражений

1) Интеграл вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx \quad (n, m \in \mathbb{Z})$

а) Если n – чётное число и m – чётное, то подынтегральное выражение преобразуют с помощью формул:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

б) Если одно из чисел m или n – нечётное, то выполняют замену:

$t = \sin x$, если n – нечётное;

$t = \cos x$, если m – нечётное.

Эта замена приводит к интегрированию степенных интегралов или рациональных дробей. [1]

в) Если оба числа m и n – нечётные, то интеграл берется как в случае замены:

$t = \sin x$, так и $t = \cos x$.

Пример 25. Вычислить интеграл:

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = d \sin x = \cos x dx \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2} + C = -\frac{1}{2\sin^2 x} + C.$$

Ответ: $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = -\frac{1}{2\sin^2 x} + C.$

2) Интегралы вида:

$$\int \sin(mx) \cdot \cos(nx) dx; \quad \int \sin(mx) \cdot \sin(nx) dx; \quad \int \cos(mx) \cdot \cos(nx) dx$$

где $n, m \in R; n \neq m.$

Такие интегралы находят после предварительного применения формул:

$$\sin(mx) \cdot \cos(nx) = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x),$$

$$\sin(mx) \cdot \sin(nx) = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x),$$

$$\cos(mx) \cdot \cos(nx) = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x).$$

Пример 28. Вычислить интеграл:

$$\int \sin 3x \cdot \cos 5x dx = \frac{1}{2} \int (\sin(8x) + \sin(-2x)) dx = \frac{1}{2} \int \sin 8x dx - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx \equiv \frac{1}{4} \int \frac{1+2t^2+t^4}{t^3} dt = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^3} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} + \frac{1}{4} \int t dt =$$

$$= -\frac{1}{16} \cos 8x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

Ответ: $\int \sin 3x \cdot \cos 5x dx = -\frac{1}{16} \cos 8x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$

3) Интеграл вида: $\int f(\sin x; \cos x) dx$, где $f(u; v)$ – рациональная функция двух переменных.

Такие интегралы приводятся к интегралам от рациональной дроби с помощью замены:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2};$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2};$$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{x}{2} \right)} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{x}{2} \right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Пример 29. Вычислить интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t \\ dt = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2} (1+t^2)^3}{(2t)^3} = \frac{1}{4} \int \frac{(1+t^2)^2}{t^3} dt =$$

$$= -\frac{1}{8t^2} + \frac{1}{2} \ln|t| + \frac{1}{8} t^2 + C = -\frac{1}{8 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{x}{2} \right)} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{\operatorname{tg}^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{8} + C.$$

Ответ: $\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{1}{8 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{x}{2} \right)} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{\operatorname{tg}^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{8} + C.$

4) Интегралы вида: $\int f(\sin^2 x; \cos^2 x) dx$, где $f(u; v)$ – рациональная функция двух переменных.

Такие интегралы находят сведением к интегралу от рациональной дроби с помощью замены:

$$t = \operatorname{tg} x \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}; \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

Пример 30. Вычислить интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4\cos^2 x} = \left[\begin{array}{l} \text{Замена} \\ t = \operatorname{tg} x \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2}; \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} - 4 \cdot \frac{1}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 - 4} = \frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 2} \right| + C.$$

Ответ: $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4\cos^2 x} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 2} \right| + C.$

5) Интегралы вида: $\int \operatorname{tg}^m x dx$; $\int \operatorname{ctg}^m x dx$, где $m \in N (m \geq 2)$.

Такие интегралы находят после предварительного применения формул:

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1; \quad \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

или с помощью замены:

$$t = \operatorname{tg} x \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}; \quad \text{или}$$

$$t = \operatorname{ctg} x \Rightarrow x = \operatorname{arcctg} t \Rightarrow dx = -\frac{dt}{1+t^2}.$$

Пример 31. Вычислить интеграл:

$$\int \operatorname{tg}^4 x dx = \left[\begin{array}{l} \text{Замена} \\ t = \operatorname{tg} x \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{t^4}{1+t^2} dt = \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2} \right) dt =$$

$$= \int t^2 dt - \int dt + \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C.$$

Ответ: $\int \operatorname{tg}^4 x dx = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C.$

6. Интегрирование некоторых видов иррациональных выражений

1) Интеграл вида $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+C}} dx$

Такие интегралы находят с помощью преобразований и замены, аналогичных преобразованиям и замене для нахождения интеграла от простой рациональной дроби III типа. [1]

Пример 32. Вычислить интеграл:

$$\int \frac{(x-5)dx}{\sqrt{6+4x-x^2}} = \int \frac{(x-5)dx}{\sqrt{-(x-2)^2+10}} = \left[\begin{array}{l} \text{Замена} \\ x-2=t \\ x=t+2 \\ dx=dt \end{array} \right] = \int \frac{(t-3)dt}{\sqrt{10-t^2}} =$$

$$= \int \frac{tdt}{\sqrt{10-t^2}} - 3 \int \frac{dt}{\sqrt{10-t^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(10-t^2)}{\sqrt{10-t^2}} - 3 \arcsin \frac{t}{\sqrt{10}} =$$

$$= -\sqrt{10-t^2} - 3 \arcsin \frac{t}{\sqrt{10}} + C = -\sqrt{6+4x-x^2} - 3 \arcsin \frac{x-2}{\sqrt{10}} + C.$$

Ответ: $\int \frac{(x-5)dx}{\sqrt{6+4x-x^2}} = -\sqrt{6+4x-x^2} - 3 \arcsin \frac{x-2}{\sqrt{10}} + C.$

2) Подынтегральная функция содержит $\sqrt{a^2-x^2}$.

Тогда надо выполнить замену:

$$x = a \sin t; \quad \left(t = \arcsin \frac{x}{a} \right)$$

$$dx = a \cos t dt$$

$$\sqrt{a^2-x^2} = a \cos t$$

Такая замена приводит к интегралу от некоторого тригонометрического выражения.

Пример 33. Вычислить интеграл:

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx = \left[\begin{array}{l} x = 2 \cdot \sin t; t = \arcsin \frac{x}{2} \\ dx = 2 \cos t \\ \sqrt{4-x^2} = 2 \cos t \end{array} \right] = \int \frac{2 \cos t \cdot 2 \cos t dt}{2 \sin t} =$$

$$= 2 \int \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt = 2 \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} \cdot \sin t dt = 2 \int \frac{\cos^2 t (-d(\cos t))}{1 - \cos^2 t} =$$

$$= 2 \int \frac{1 - \cos^2 t - 1}{1 - \cos^2 t} d(\cos t) = 2 \int d(\cos t) - 2 \int \frac{d \cos t}{1 - \cos^2 t} =$$

$$= 2 \cos t - \frac{2}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos t}{1 - \cos t} \right| + C = \sqrt{4-x^2} - \ln \left| \frac{1 + \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} \right| + C =$$

$$= \sqrt{4-x^2} - \ln \left| \frac{2 + \sqrt{4-x^2}}{2 - \sqrt{4-x^2}} \right| + C.$$

Ответ: $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx = \sqrt{4-x^2} - \ln \left| \frac{2 + \sqrt{4-x^2}}{2 - \sqrt{4-x^2}} \right| + C.$

3) Подынтегральная функция содержит $\sqrt{x^2-a^2}$.

Тогда надо выполнить замену:

$$x = \frac{a}{\cos t}; \quad \left(t = \arccos \frac{a}{x} \right)$$

$$dx = \frac{a \cdot \sin t}{\cos^2 t} dt$$

$$\sqrt{x^2-a^2} = a \operatorname{tg} t$$

Пример 34. Вычислить интеграл:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} = \left[\begin{array}{l} \text{Замена} \\ x = \frac{3}{\cos t}; \sqrt{x^2-9} = 3 \operatorname{tg} t \\ dx = \frac{3 \sin t}{\cos^2 t} dt \end{array} \right] = \int \frac{\frac{3 \sin t}{\cos^2 t} dt}{\frac{3}{\cos t} \cdot 3 \frac{\sin t}{\cos t}} = \frac{1}{3} \int dt =$$

$$= \frac{1}{3} t + C = \frac{1}{3} \cdot \arccos \frac{3}{x} + C.$$

Ответ: $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{3} t + C = \frac{1}{3} \cdot \arccos \frac{3}{x} + C.$

4) Подынтегральная функция содержит $\sqrt{x^2+a^2}$.

Тогда надо выполнить замену:

$$x = a \cdot \operatorname{tg} t; \left(t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right)$$

$$dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt$$

$$\sqrt{x^2+a^2} = \frac{a}{\cos t}$$

Пример 35. Вычислить интеграл:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}} dx = \left[\begin{array}{l} \text{Замена} \\ x = 2 \operatorname{tg} t; t = \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \\ dx = \frac{2}{\cos^2 t} dt; \sqrt{4+x^2} = \frac{2}{\cos t} \end{array} \right] = \int \frac{8 \frac{\sin^3 t}{\cos^3 t} \cdot \frac{2}{\cos^2 t} dt}{\frac{2}{\cos t}} =$$

$$= 8 \int \frac{\sin^3 t}{\cos^4 t} dt = 8 \int \frac{\sin^2 t \cdot \sin t dt}{\cos^4 t} = -8 \int \frac{(1-\cos^2 t) d \cos t}{\cos^4 t} =$$

$$= -8 \int \frac{d \cos t}{\cos^4 t} + 8 \int \frac{d \cos t}{\cos^2 t} = -8 \left(-\frac{1}{3 \cos^3 t} \right) + 8 \left(-\frac{1}{\cos t} \right) + C =$$

$$= \frac{8 \cdot \sqrt{(4+x^2)^3}}{3 \cdot 8} - \frac{8 \cdot \sqrt{4+x^2}}{2} + C = \frac{\sqrt{(4+x^2)^3}}{3} - 4\sqrt{4+x^2} + C.$$

Ответ: $\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}} dx = \frac{\sqrt{(4+x^2)^3}}{3} - 4\sqrt{4+x^2} + C.$

5) Подынтегральная функция содержит $\sqrt[n]{ax+b}$:

Тогда надо выполнить замену:

$$t = \sqrt[n]{ax+b}.$$

Пример 36. Вычислить интеграл:

$$\int \frac{xdx}{1+\sqrt[3]{2x+3}} = \left[\begin{array}{l} \text{Замена} \\ \sqrt[3]{2x+3} = t \\ x = \frac{t^3-3}{2}; dx = \frac{3t^2}{2} dt \end{array} \right] = \int \frac{(t^3-3) \cdot 3t^2 dt}{2 \cdot (1+t) \cdot 2} = \frac{3}{4} \int \frac{t^5-3t^2}{1+t} dt$$

$$\frac{t^5-3t^2}{1+t} = t^4 - t^3 + t^2 - 4t + 4 - \frac{4}{1+t}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{4} \int \left(t^4 - t^3 + t^2 - 4t + 4 - \frac{4}{1+t} \right) dt = \frac{3}{4} \int t^4 dt - \frac{3}{4} \int t^3 dt + \frac{3}{4} \int t^2 dt + 3 \int t dt - 3 \int \frac{4}{1+t} dt \\
&= \frac{3}{20} t^5 - \frac{3}{16} t^4 + \frac{1}{4} t^3 - \frac{3t^2}{2} + 3t - 3 \ln|1+t| + C = \frac{3}{20} \sqrt[3]{(2x+3)^5} - \frac{3}{16} \sqrt[3]{(2x+3)^4} \\
&+ \frac{1}{4} (2x+3) - \frac{3}{2} \sqrt[3]{(2x+3)^2} + 3\sqrt[3]{2x+3} - 3 \ln|1 + \sqrt[3]{2x+3}| + C.
\end{aligned}$$

Ответ: $\int \frac{x dx}{1 + \sqrt[3]{2x+3}} = \frac{3}{20} \sqrt[3]{(2x+3)^5} - \frac{3}{16} \sqrt[3]{(2x+3)^4} + \frac{1}{4} (2x+3) - \frac{3}{2} \sqrt[3]{(2x+3)^2} + 3\sqrt[3]{2x+3} - 3 \ln|1 + \sqrt[3]{2x+3}| + C.$

Пример 37. Вычислить интеграл:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}} &= \left[\begin{array}{l} \text{Замена} \\ x = t^6 \Rightarrow t = \sqrt[6]{x} \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right] = \int \frac{6t^5 dt}{t^2 + t^3} = 6 \int \frac{t^5}{t^2(1+t)} dt = 6 \int \frac{t^3}{1+t} dt = \\
&= 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t} \right) dt = 6 \int t^2 dt - 6 \int t dt + 6 \int dt - 6 \int \frac{dt}{1+t} = \\
&= 6 \cdot \frac{t^3}{3} - 6 \frac{t^2}{2} + 6t - 6 \ln|1+t| + C = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln|1 + \sqrt[6]{x}| + C.
\end{aligned}$$

Ответ: $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}} = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln|1 + \sqrt[6]{x}| + C.$

7. Контрольные вопросы

1. Дать определение первообразной функции.
2. Дать определение неопределенного интеграла. Указать его геометрический смысл.
3. Сформулировать свойства неопределенного интеграла.
4. Написать таблицу основных интегралов.
5. Замена переменной в неопределенном интеграле.

6. Интегрирование по частям.
7. Как интегрируются простейшие рациональные дроби I, II, III типа?
8. Сформулировать теорему о разложении правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей.
9. Интегрирование неправильных дробей.
10. Как интегрируются тригонометрические функции?
11. Указать тригонометрические подстановки для интегралов:

$$\int R(x\sqrt{a^2 - x^2}) dx, \quad \int R(x\sqrt{a^2 + x^2}) dx$$

8. Задания для самостоятельного решения

Найти неопределенные интегралы.

- | | | | | |
|----|----|---|----|---------------------------------------|
| 1. | а) | $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}},$ | б) | $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx,$ |
| | в) | $\int \frac{x+2}{x^2+2x+5} dx,$ | г) | $\int \frac{dx}{1+\sin x}.$ |
| 2. | а) | $\int \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\sin x \cdot \cos x} dx,$ | б) | $\int x^2 \cdot e^{-\frac{x}{2}} dx,$ |
| | в) | $\int \frac{3x-1}{\sqrt{2x^2-5x+1}} dx,$ | г) | $\int \frac{dx}{4\sin x - 6\cos x}$ |
| 3. | а) | $\int \frac{3^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx,$ | б) | $\int x^2 \cdot \sin 4x dx,$ |

	В)	$\int \frac{2x-3}{x^2+2x-7} dx,$	Г)	$\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} dx.$	9.	а)	$\int \frac{e^{2x} dx}{5 \cdot e^{2x} + 1},$	б)	$\int \frac{\operatorname{arctg}^4 x}{x^2+1} dx,$
4.	а)	$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+4}},$	б)	$\int x \cdot \sin 4x dx,$		В)	$\int \frac{5x+1}{x^2-4x+1} dx,$	Г)	$\int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx.$
	В)	$\int \frac{x-2}{\sqrt{3-2x^2}} dx,$	Г)	$\int \frac{3x^2-15}{(x-1) \cdot (x^2+5x+6)} dx.$	10.	а)	$\int \frac{x+\operatorname{arctg} x}{x^2+1} dx,$	б)	$\int e^{3x} \cdot \sin x dx,$
5.	а)	$\int \frac{1+3x}{\sqrt{1+4x^2}} dx,$	б)	$\int x^2 \cdot 5^x dx,$		В)	$\int \frac{x-5}{\sqrt{3x^2-6x-1}} dx,$	Г)	$\int \frac{dx}{3\cos x+4\sin x}$
	В)	$\int \frac{x+1}{2x^2+x+1} dx,$	Г)	$\int \frac{6x^2}{(x-1) \cdot (x^2+3x+2)} dx.$					
6.	а)	$\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x} dx,$	б)	$\int x^2 \cdot e^x dx,$					
	В)	$\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+13}} dx,$	Г)	$\int \frac{2x^2-26}{(x^2+4x+3) \cdot (x+5)} dx.$					
7.	а)	$\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx,$	б)	$\int \sqrt{x} \cdot \ln^2 x dx,$					
	В)	$\int \frac{4x-1}{4x^2-4x+5} dx,$	Г)	$\int \frac{dx}{4-5\cos x}.$					
8.	а)	$\int \frac{\sin 2x dx}{3\sin^2 x+4},$	б)	$\int x^2 \cdot \cos 6x dx,$					
	В)	$\int \frac{x-8}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx,$	Г)	$\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}.$					

§ 3. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Задача, приводящая к определённому интегралу

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная неотрицательная функция $y = f(x)$.

Определение 1. Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная осью абсцисс, прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$.

Задача: вычислить площадь этой криволинейной трапеции (рис. 1)

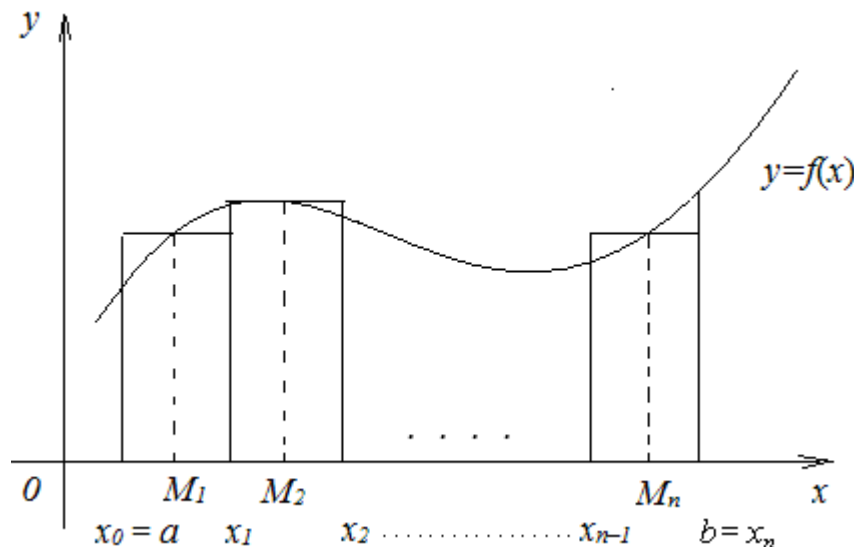


Рис. 1

Решение.

1) Разобьём отрезок $[a;b]$ на n частей точками $x_0 = a$; x_1 ; x_2 ; x_{n-1} ; $x_n = b$ и проведём прямые $x = x_1$, $x = x_2$, ... $x = x_{n-1}$, которые разобьют трапецию на n частей.

2) Обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ — длины отрезков разбиения $[a;b]$. На каждом из отрезков произвольно выберем точку M_k ($k = 1, 2, \dots, n$).

Построим на каждом из отрезков прямоугольники с высотами, равными значению функции в выбранных точках M_k .

Площади полученных прямоугольников равны:

$$S_1 = f(M_1) \cdot \Delta x_1; S_2 = f(M_2) \cdot \Delta x_2, \dots, S_n = f(M_n) \cdot \Delta x_n.$$

3) Найдём сумму этих площадей:

$$\bar{S} = f(M_1) \cdot \Delta x_1 + f(M_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(M_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta x_k$$

Получили площадь ступенчатой фигуры. Эта площадь зависит от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на части и от выбора на каждой из частей точек M_k ($k = 1, 2, \dots, n$).

Чем больше будет точек разбиения отрезка $[a;b]$ на части и мельче по длине эти части, тем точнее сумма $\bar{S} = \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta x_k$ будет

приближаться к площади данной криволинейной трапеции, т.е. можно записать:

$$S_{\text{крив.тр.}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \bar{S} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta x_k$$

Определение 2. Сумма $\bar{S} = \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta x_k$ называется интегральной

суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Определение 3. Предел интегральной суммы \bar{S} функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ при $n \rightarrow \infty$ и $\max \Delta x_k \rightarrow 0$ называется определённым интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на части, ни от выбора точек M_k ($k = 1, \dots, n$) на каждой из частей. То есть:

$$S_{\text{крив.гр.}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta x_r = \int_a^b f(x) dx.$$

При этом отрезок $[a;b]$ называют отрезком интегрирования, “ a ” – нижним пределом интегрирования, “ b ” – верхним пределом.

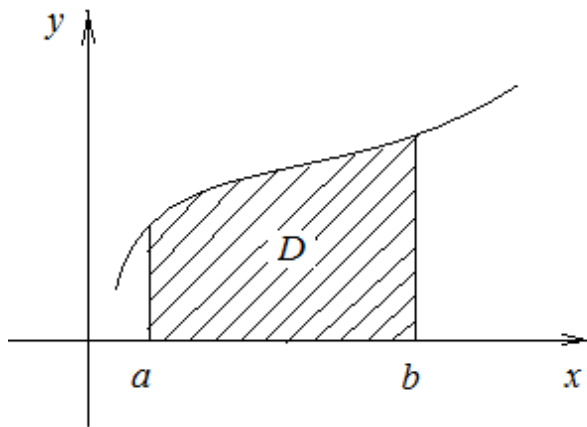
Теорема 1 (достаточное условие интегрируемости функции на отрезке $[a;b]$). Если функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ непрерывна, то

определённый интеграл $\int_a^b f(x) dx$ существует, т.е. функция $f(x)$ на

отрезке $[a;b]$ интегрируема. [3]

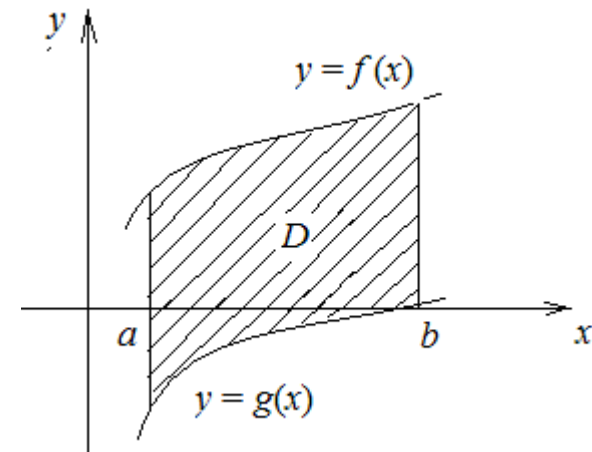
2. Геометрический смысл определённого интеграла

$$1) S_{\text{кр.гр.}} = \int_a^b f(x) dx$$



2) Если область ограничена двумя кривыми $y=f(x)$ и $y=g(x)$, причём при $x \in [a;b]$ $f(x) \geq g(x)$, то площадь области, ограниченной кривыми $y=f(x)$; $y=g(x)$ и прямыми $x=a$, $x=b$, вычисляется по формуле:

$$S_D = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$



3. Свойства определённого интеграла

$$1) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$2) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$3) \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$4) \int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx$$

5) Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a;c]$ и $[c;b]$, то она интегрируема и на отрезке $[a;b]$, причём верно равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

при любом расположении точек a , b и c на оси Ox .

6) Если $f(x) \geq 0$ при $x \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

7) Если на отрезке $[a; b]$ $f(x) \geq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

8) **Теорема 2 (о среднем значении определённого интеграла).** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то на этом отрезке найдётся хотя бы одна точка c , в которой выполняется равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b - a)$$

4. Вычисление определенного интеграла.

4.1 Интеграл с переменным верхним и постоянным нижним пределами и его свойства

Определение 4. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда она непрерывна на отрезке $[a; x]$ для любого $x \in [a; b]$.

Следовательно, на отрезке $[a; b]$ определена функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$,

которая называется интегралом с переменным верхним пределом.

Свойства этой функции сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда

функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ обладает свойствами:

1) непрерывна на отрезке $[a; b]$;

2) имеет производную $F'(x)$ в каждой точке $x \in [a; b]$, удовлетворяющую

$$\text{равенству } F'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x).$$

Из теоремы 3 следует, что функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ является первообразной для функции $f(x)$.

4.2 Формула Ньютона–Лейбница

Теорема 4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $\Phi(x)$ – какая-либо её первообразная на отрезке $[a; b]$. Тогда определённый интеграл от функции $f(x)$ по отрезку $[a; b]$ равен разности значений функции $\Phi(x)$ в точках b и a :

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Это и есть формула Ньютона–Лейбница. Она является основной формулой интегрального исчисления, и даёт правило вычисления определённого интеграла.

Формулу Ньютона–Лейбница часто записывают в виде:

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(x) \Big|_a^b,$$

где используется обозначение:

$$\Phi(x) \Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Задача вычисления определённого интеграла свелась к нахождению первообразной непрерывной функции. [2]

Пример 1. Вычислить интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0) = -(0 - 1) = 1.$$

Ответ: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1.$

Пример 2. Вычислить интеграл:

$$\int_2^3 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln|x^2+1| \Big|_2^3 = \frac{1}{2} (\ln 10 - \ln 5) = \frac{1}{2} \ln \frac{10}{5} = \frac{1}{2} \ln 2$$

Ответ: $\int_2^3 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln 2.$

5. Методы интегрирования определённого интеграла

5.1. Замена переменной в определённом интеграле

Теорема 5. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и пусть функция $x = \varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha;\beta]$, область значений этой функции – отрезок $[a;b]$, т.е. $a \leq \varphi(t) \leq b$ для $t \in [\alpha;\beta]$, причём $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Тогда справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Пример 3. Вычислить интеграл:

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{2tdt}{1+t} = 2 \int_0^2 \frac{t+1-1}{1+t} dt = 2 \int_0^2 dt - 2 \int_0^2 \frac{dt}{1+t} = 2t \Big|_0^2 - 2 \ln|1+t| \Big|_0^2 = 4 - 0 - 2 \ln 3 + 2 \ln 1 = 4 - 2 \ln 3.$$

Ответ: $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 4 - 2 \ln 3.$

Пример 4. Вычислить интеграл:

$$\int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx = \left[\begin{array}{l} \text{Замена} \\ x = 2 \sin t, \sqrt{4-x^2} = 2 \cos t \\ dx = 2 \cos t dt, \left. \begin{array}{l} x \\ t \end{array} \right| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} 2 \\ \frac{\pi}{2} \end{array} \end{array} \right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin^2 t \cdot 2 \cos t \cdot 2 \cos t dt =$$

$$= 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot \cos^2 t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4t dt =$$

$$= 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \sin 4t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - \frac{1}{2} (\sin 2\pi - \sin 0) = \pi.$$

Ответ: $\int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx = \pi.$

5.2. Интегрирование по частям в определённом интеграле

Теорема 6. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a; b]$. Тогда справедливо равенство:

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u'(x) dx.$$

Эту формулу удобно записать в виде:

$$\int_a^b u dv = (u \cdot v) \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$$

Пример 5. Вычислить интеграл:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \operatorname{arctg} x dx = \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x \\ dV = x dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2} \\ V = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \left(\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{3} - 0 - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} x \Big|_0^{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{3} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \operatorname{arctg} x dx = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Пример 6. Вычислить интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x dx = \left[\begin{array}{l} u = x \\ dV = \sin x dx \\ du = dx \\ V = -\cos x \end{array} \right] = -x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx =$$

$$= -\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + 0 \cdot \cos 0 + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 1 + \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 0 + 0 + 1 - 0 = 1.$$

Ответ: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x dx = 1.$

6. Приложения определённого интеграла

6.1. Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольной системе координат

а) Область D ограничена кривыми $y = f(x)$ и $y = g(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$, причём $f(x) \geq g(x)$ для $x \in [a; b]$.

$$S_D = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

б) Область D ограничена кривыми $x = f(y)$ и $x = g(y)$, прямыми $y = c$ и $y = d$, причём $f(y) \geq g(y)$ для $y \in [c; d]$.

$$S_D = \int_c^d (f(y) - g(y)) dy.$$

6.2. Вычисление площади плоской фигуры в полярной системе координат

а) *Полярная система* координат задается полярной осью Ox , полюсом – точка O и масштабной единицей (рис. 2)

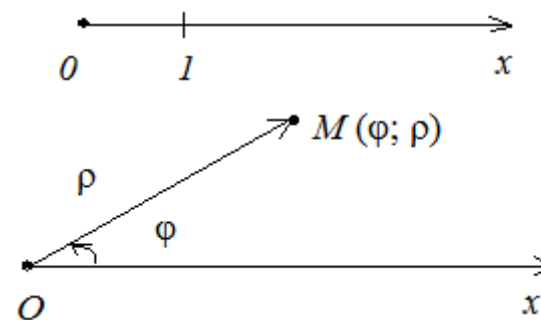


Рис. 2

Точка M в этой системе задаётся двумя координатами (φ и ρ): φ – угол наклона радиуса-вектора \overline{OM} к оси Ox ; ρ – длина радиуса-вектора $|\overline{OM}|$.

Формулы перехода от полярной системы координат к прямоугольной системе, связанной с полярной точкой начала координат – точка O , осью абсцисс с полярной осью и осью ординат, перпендикулярной полярной оси

$$M(\varphi; \rho) = M(x; y): \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Уравнение кривой в полярной системе координат – соотношение между ρ и φ : $\rho = \rho(\varphi)$.

б) Площадь криволинейного сектора в полярной системе, ограниченного лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, кривой $\rho = \rho(\varphi)$ (рис. 3), вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

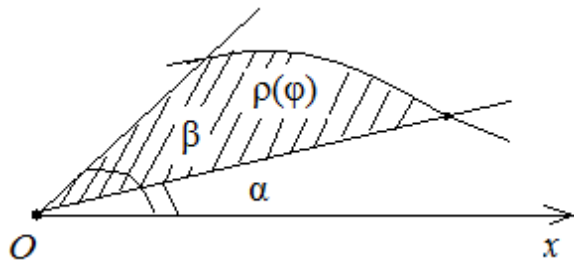


Рис.3

6.3 Вычисление объёма тела по площадям параллельных сечений

Пусть задано объёмное тело T , для которого известна площадь $S(x)$ любого сечения плоскостью, проходящей через точку $(x;0;0)$ перпендикулярно оси Ox , $a \leq x \leq b$ (рис. 4). Нужно вычислить объём тела.

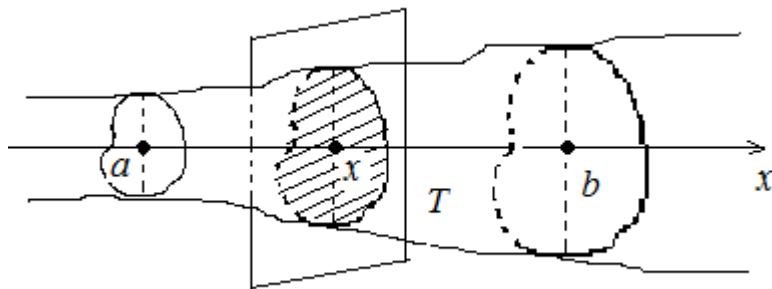


Рис. 4

Пусть функция $S(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда объём тела T вычисляется по формуле:

$$V_T = \int_a^b S(x) dx .$$

6.4 Вычисление объёма тела вращения

Надо вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $ABCD$, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a, x = b$.

В таком случае площадь поперечного сечения в точке $x \in [a;b]$ круг радиусом $f(x)$ равна:

$$S(x) = \pi \cdot f^2(x) .$$

Тогда объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $ABCD$, вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx .$$

Объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции $ABCD$, ограниченной кривой $x = \varphi(y)$, осью Oy и прямыми $y = c, y = d$, вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy .$$

7.Контрольные вопросы

- 1.Определение определенного интеграла, его геометрический смысл.
- 2.Сформулировать свойства определенного интеграла.
- 3.Формула Ньютона-Лейбница.
- 4.Замена переменной в определенном интеграле.
- 5.Записать формулу определенного интегрирования по частям.
- 6.Формулы вычисления площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.
- 7.Формулы для вычисления объемов тел вращения.

8. Задания для самостоятельного решения

Вычислить интегралы:

$$1. \int_1^5 \frac{dx}{3x-2} \quad 2. \int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3} \quad 3. \int_1^2 \frac{dx}{x^2+5x+4} \quad 4.$$

$$17. \int_1^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}} dx \quad 18. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} \quad 19.$$

$$\int_0^2 \frac{x+3}{x^2+4} dx.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}.$$

$$5. \int_{-2}^2 x \cos \frac{x}{2} dx. \quad 6. \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2} dx. \quad 7. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x+1)^4} \quad 8.$$

$$20. \int_0^{\pi/2} \sin 2x \cdot \sin 3x dx.$$

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}.$$

$$9. \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx. \quad 10. \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx. \quad 11. \int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2 \cos x} \quad 12.$$

$$\int_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{2+4x}}.$$

$$13. \int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx. \quad 14. \int_1^2 \frac{dx}{x^2+x} \quad 15. \int_0^1 \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad 16.$$

$$\int_0^{\pi/4} e^x \sin 2x dx.$$

§ 4. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

При изучении определённого интеграла от функции $f(x)$, требуется, чтобы функция $f(x)$ удовлетворяла следующим условиям:

- была определена на конечном отрезке $[a;b]$;
- была непрерывна на отрезке $[a;b]$.

Если нарушено хотя бы одно из указанных условий, то речь будет идти о несобственных интегралах первого и второго рода. [4]

1. Интегралы с бесконечными пределами

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$ или $(-\infty;a]$ или $(-\infty;+\infty)$.

Определение 1. Если существует конечный предел $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$, то

этот предел называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ на бесконечном промежутке $[a;+\infty)$, обозначается $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и в этом

случае считается, что интеграл сходится. Если $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$ не

существует или равен ∞ , то считается, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

расходится.

Аналогично определяются интегралы:

$$\bullet \int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f(x)dx$$

$$\bullet \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f(x)dx + \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x)dx$$

Если пределы конечные, то соответствующий интеграл считают сходящимся, а если хотя бы один из пределов не существует или бесконечный, то интеграл считают расходящимся.

Пример 1. Исследовать на сходимость несобственный интеграл:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} xe^{-2x} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b xe^{-2x} dx = \left[\begin{array}{l} u = x \\ dV = e^{-2x} dx \end{array} \middle| V = -\frac{1}{2} e^{-2x} \right] = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x}{2} e^{-2x} \bigg|_1^b + \frac{1}{2} \int_1^b e^{-2x} dx \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{b}{2e^{2b}} + \frac{e^{-2}}{2} - \frac{1}{4} e^{-2x} \bigg|_1^b \right) = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{b}{2e^{2b}} + \frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{4} e^{-2b} + \frac{1}{4} e^{-2} \right) = -\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b}{2e^{2b}} - \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{4e^{2b}} + \\ &= -\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{4e^{2b}} - 0 + \frac{3}{4e^2} = \frac{3}{4e^2} \end{aligned}$$

Так как получили конечное число, то интеграл $\int_1^{+\infty} xe^{-2x} dx$ сходится и

равен $\frac{3}{4e^2}$.

$$\text{Ответ: } \int_1^{+\infty} xe^{-2x} dx = \frac{3}{4e^2}.$$

2. Интегралы от разрывных функций

1) Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$, а в точке $x = b$ либо не определена, либо имеет разрыв. Такую точку $x = b$ будем называть особой точкой функции $f(x)$.

Определение 2. Если существует конечный предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$, то

он называется несобственным интегралом второго рода от функции $f(x)$

на отрезке $[a; b]$ и обозначается символом $\int_a^b f(x) dx$. При этом говорят,

что несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится и записывается

равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

Если конечный предел не существует или он бесконечный, то говорят,

что несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ расходится.

2) Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$, а в точке $x = a$ либо не определена, либо имеет разрыв. Такую точку $x = a$ называют особой точкой функции $f(x)$.

Определение 3. Если существует конечный предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx \right)$,

то он называется несобственным интегралом второго рода от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначается символом

$$\int_a^b f(x) dx.$$

При этом говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится и

записывается равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx \right).$$

Если конечный предел не существует или бесконечен, то говорят, что

несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ расходится. [3]

Замечание. Если функция $f(x)$ имеет разрыв в некоторой точке $x = c$ внутри отрезка $[a; b]$, то по определению полагают:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx \right) + \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_{c+\delta}^b f(x) dx \right)$$

при условии, что оба предела в правой части существуют, и ε и δ не зависят друг от друга. Этот интеграл также называют несобственным интегралом второго рода от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначается символом:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Сходимость или расходимость такого интеграла зависит от существования или не существования конечного предела.

Пример 2. Исследовать на сходимость:

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\varepsilon}^1 \ln x dx \right) = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \\ dV = dx \\ V = x \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = \frac{1}{x} dx \\ \end{array} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(x \ln x \middle|_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 dx \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \middle|_{\varepsilon}^1 - x \middle|_{\varepsilon}^1 \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\ln 1}{1} - \frac{\ln \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} - 1 + \varepsilon \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(0 - \frac{1}{\varepsilon} - 1 + 0 \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon - 1) = 0 - 1 = -1$$

Так получили конечное число, то $\int_0^1 \ln x dx$ сходится и равен «-1».

Ответ: $\int_0^1 \ln x dx = -1$.

Пример 3. Исследовать на сходимость:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\arcsin x \middle|_0^{1-\varepsilon} \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\arcsin(1-\varepsilon)) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

Так как получили конечное число, то $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ сходится и равен $\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$.

Пример 4. Исследовать на сходимость:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} \right) + \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_{\delta}^1 \frac{dx}{x^2} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x} \middle|_{-1}^{-\varepsilon} \right) + \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x} \middle|_{\delta}^1 \right) =$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) + \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(-1 + \frac{1}{\delta} \right) = \infty + \infty = \infty$$

Так как получили бесконечность, то $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ расходится.

Ответ: $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ расходится.

3. Контрольные вопросы:

1. Какой интеграл называется несобственным?
2. Дайте определение несобственных интегралов 1-го и 2-го родов.
3. Сформулируйте свойства несобственных интегралов.
4. Укажите признаки сходимости несобственных интегралов для неотрицательных функций.

4. Задания для самостоятельного решения

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

$$1. \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}.$$

$$2. \int_{-\infty}^{-3} \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$3. \int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}.$$

$$4. \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}.$$

$$5. \int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$6. \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt[3]{x^2 + 1}}.$$

$$7. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}.$$

$$8. \int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}.$$

$$9. \int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 9}.$$

$$10. \int_1^e \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\ln x}}.$$

Контрольные вопросы:

1. Какой интеграл называется несобственным?
2. Дайте определение несобственных интегралов 1-го и 2-го родов.
3. Сформулируйте свойства несобственных интегралов.
4. Укажите признаки сходимости несобственных интегралов для неотрицательных функций.

$$1 \quad \int dx = x + C;$$

$$2 \quad \int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, \quad k \neq -1;$$

$$3 \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$$

$$4 \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \quad 4a \quad \int e^x dx = e^x + C;$$

$$5 \quad \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$6 \quad \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$7 \quad \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$8 \quad \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$9 \quad \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$$

$$10 \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| \sqrt{x^2 \pm a^2} + x \right| + C;$$

$$11 \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$12 \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Таблица основных интегралов

Образец решения варианта

Задание 1: Вычислить интеграл:

а) $\int \left(x^5 + \frac{4}{x^3} - \sqrt[3]{x^2} - 7 \right) dx;$ б) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}};$ в) $\int \frac{x^4}{\sin^2 x^5} dx;$

г) $\int 3^{2-7x} dx;$ д) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx;$ е) $\int e^x \cdot \sin e^x dx;$

ж) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx;$ з) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-7}} dx;$ и) $\int \frac{\sin 5x}{4-\cos^2 5x} dx;$

к) $\int x \cdot \operatorname{tg} x^2 dx;$ л) $\int \frac{3^x}{9^x+4} dx;$ м) $\int x^2 \cdot \cos x dx;$

н) $\int \arccos x dx;$ о) $\int \frac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x} dx;$ п) $\int \frac{x^6}{x^2-x+1} dx;$

р) $\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)};$ с) $\int \frac{3x dx}{\sqrt{3x^2-2} + \sqrt[4]{3x^2-2}};$ т) $\int \cos 3x \cos 5x dx;$

у) $\int \sin^4 x dx;$ ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}};$

Решение:

а) Найдем интеграл, применив свойства неопределенного интеграла и формулы (1) и (2) табличного интегрирования:

$$\begin{aligned} \int \left(x^5 + \frac{4}{x^3} - \sqrt[3]{x^2} - 7 \right) dx &= \int \left(x^5 + 4 \cdot x^{-3} - x^{\frac{2}{3}} - 7 \right) dx = \int x^5 dx + 4 \int x^{-3} dx - \int x^{\frac{2}{3}} dx \\ &= \frac{x^{5+1}}{5+1} + 4 \cdot \frac{x^{-3+1}}{-3+1} - \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} - 7x + C = \frac{x^6}{6} + 4 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} - \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - 7x + C = \frac{x^6}{6} - \frac{2}{x^2} - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{5} - 7x + C \end{aligned}$$

Интегралы (б – л) решим методом замены переменной.

$$\text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}} \left| \begin{array}{l} t = 1+2x; \\ dt = 2dx; \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right. = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt[4]{t^3}} = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{3}{4}} dt =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (2)}

$$= \frac{1}{2} \cdot t^{\frac{1}{4}} + C = 2(1+2x)^{\frac{1}{4}} + C = 2\sqrt[4]{1+2x} + C;$$

$$\text{в) } \int \frac{x^4}{\sin^2 x^5} dx \left| \begin{array}{l} t = x^5 \\ dt = 5x^4 dx \\ x^4 dx = \frac{1}{5} dt \end{array} \right. = \int \frac{\frac{1}{5} dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{\sin^2 t} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (12)}

$$= -\frac{1}{5} \operatorname{ctg} t + C = -\frac{1}{5} \operatorname{ctg} x^5 + C;$$

$$r) \int 3^{2-7x} dx = \left| \begin{array}{l} t = 2 - 7x, \\ dt = -7dx, \\ dx = -\frac{1}{7} dt \end{array} \right| = \int 3^t \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) dt = -\frac{1}{7} \int 3^t dt =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (4)}

$$= -\frac{1}{7} \cdot \frac{3^t}{\ln 3} + C = -\frac{1}{7} \cdot \frac{3^{2-7x}}{\ln 3} + C;$$

$$д) \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{arctg} x \\ dt = \frac{1}{1+x^2} dx \end{array} \right| = \int t dt =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (2)}

$$= \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x + C;$$

$$е) \int e^x \cdot \sin e^x dx = \left| \begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right| = \int \sin t dt =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (5)}

$$= -\cos t + C = -\cos e^x + C;$$

$$ж) \int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{2^2-t^2}} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (8)}

$$= \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{2} + C;$$

з)

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-7}} dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{(e^x)^2 - (\sqrt{7})^2}} dx = \left| \begin{array}{l} t = e^x, \\ dt = e^x dx, \\ e^x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - (\sqrt{7})^2}} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (10)}

$$= \ln \left| \sqrt{t^2 - (\sqrt{7})^2} + t \right| + C = \ln \left| \sqrt{e^{2x} - 7} + e^x \right| + C;$$

и)

$$\int \frac{\sin 5x dx}{9 - \cos^2 5x} = \left| \begin{array}{l} t = \cos 5x \\ dt = -5 \sin 5x dx \\ \sin 5x dx = -\frac{1}{5} dt \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{1}{5} dt}{9-t^2} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t^2-9} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t^2-3^2} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (9)}

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{t-3}{t+3} \right| + C = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{\cos 5x - 3}{\cos 5x + 3} \right| + C = \frac{1}{30} \ln \left| \frac{\cos 5x - 3}{\cos 5x + 3} \right| + C;$$

$$к) \int x \cdot \operatorname{tg} x^2 dx = \int \frac{x \sin x^2}{\cos x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x^2 \\ dt = -2x \sin x^2 dx \\ x \sin x^2 dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right| = -\int \frac{\frac{1}{2} dt}{t} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (3)}

$$= -\frac{1}{2} \ln |t| + C = -\frac{1}{2} \ln |\cos x^2| + C;$$

$$\text{л) } \int \frac{3^x}{9^x + 4} dx = \int \frac{3^x}{(3^x)^2 + 2^2} dx = \left. \begin{array}{l} t = 3^x \\ dt = 3^x \ln 3 dx \\ 3^x dx = \frac{1}{\ln 3} dt \end{array} \right| = \frac{1}{\ln 3} \int \frac{dt}{t^2 + 2^2} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (7)}

$$= \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2 \ln 3} \operatorname{arctg} \frac{3^x}{2} + C;$$

Найдем интегралы (м – н) методом интегрирования по частям,

используя формулу $\int U \cdot V' dx = U \cdot V - \int U' \cdot V dx$ (13):

$$\text{м) } \int x^2 \cos x dx = \left. \begin{array}{l} U = x^2; \quad U' = 2x \\ V' = \cos x; \quad V = \sin x \end{array} \right| = x^2 \sin x - \int 2x \cdot \sin x dx =$$

$$= \left. \begin{array}{l} U = 2x; \quad U' = 2 \\ V' = \sin x; \quad V = -\cos x \end{array} \right| = x^2 \cdot \sin x - (2x \cdot (-\cos x) - \int 2 \cdot (-\cos x) dx) =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (6)}

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C;$$

н)

$$\int \arccos x dx = \left. \begin{array}{l} U = \arccos x; \quad U' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ V' = 1; \quad V = x \end{array} \right| = x \cdot \arccos x - \int x \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

{второе слагаемое вычислим с помощью замены, применив формулу

(2)}

$$\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left. \begin{array}{l} t = 1-x^2 \\ dt = -2x dx \\ -x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{1-x^2} + C$$

в итоге получаем $\int \arccos x dx = x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C;$

$$\text{о) } \int \frac{x^2 + 3x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx.$$

Под знаком интеграла правильная рациональная дробь. Разложим её на простейшие дроби:

$$\frac{x^2 + 3x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \frac{x^2 + 3x + 6}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} =$$

$$= \frac{A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x-3)} =$$

$$= \frac{Ax^2 - 5Ax + 6A + Bx^2 - 3Bx + Cx^2 - 2Cx}{x(x-2)(x-3)};$$

Перейдем к равенству числителей:

$$x^2 + 3x + 6 = Ax^2 - 5Ax + 6A + Bx^2 - 3Bx + Cx^2 - 2Cx.$$

Отсюда следует, что

$$\left. \begin{array}{l} x^2 : 1 = A + B + C \\ x^1 : 3 = -5A - 3B - 2C \\ x^0 : 6 = 6A \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 = 1 + B + C \\ 8 = -3B - 2C \\ A = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 1, \\ B = -8, \\ C = 8. \end{array} \right.$$

$$\text{Тогда } \frac{x^2 + 3x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \frac{1}{x} - \frac{8}{x-2} + \frac{8}{x-3}.$$

Интегрируя почленно полученное равенство и применяя свойства неопределённого интеграла, получим:

$$\int \left(\frac{1}{x} - \frac{8}{x-2} + \frac{8}{x-3} \right) dx = \int \frac{dx}{x} - 8 \int \frac{dx}{x-2} + 8 \int \frac{dx}{x-3} =:$$

{для нахождения интегралов применим формулу (3)}

$$= \ln|x| - 8 \ln|x-2| + 8 \ln|x-3| + C;$$

п) $\int \frac{x^6}{x^2 - x + 1} dx.$

Под знаком интеграла неправильная рациональная дробь. Выделим целую часть этой дроби путем деления числителя на знаменатель:

$$\frac{x^6}{x^2 - x + 1} = x^4 + x^3 - x - 1 + \frac{1}{x^2 - x + 1}$$

Выделим полный квадрат в знаменателе правильной рациональной дроби:

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получим:

$$\int \left(x^4 + x^3 - x - 1 + \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right) dx = \int x^4 dx + \int x^3 dx - \int x dx - \int 1 dx + \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

{для нахождения первых трёх интегралов применим формулу (2), для четвёртого – формулу (1), последний интеграл найдем с помощью формулы (7)}

$$= \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctg \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - x + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C;$$

р) $\int \frac{dx}{\sin x(2 + \cos x - 2 \sin x)}.$

Найдем интеграл используя универсальную тригонометрическую подстановку:

$$\left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} \left(2 + \frac{1-t^2}{1+t^2} - 2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} \right)} = \int \frac{1+t^2}{t(t^2 - 4t + 3)} dt.$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{1+t^2}{t(t^2 - 4t + 3)} = \frac{1+t^2}{t(t-1)(t-3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t-3} = \frac{A(t-1)(t-3) + Bt(t-3) + Ct(t-1)}{t(t-1)(t-3)}$$

Перейдем к равенству числителей:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + t \right)^2 = At^2 - 4At + 3A + Bt^2 - 3Bt + Ct^2 - Ct.$$

Отсюда следует, что

$$\left. \begin{array}{l} t^2: 1 = A + B + C \\ t^1: 0 = -4A - 3B - C \\ t^0: 1 = 3A \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{1}{3}, \\ B = -1, \\ C = \frac{5}{3}, \end{array} \right.$$

Тогда $\frac{1+t^2}{t(t^2 - 4t + 3)} = \frac{1}{3t} - \frac{1}{t-1} + \frac{5}{3(t-3)}.$

Интегрируя почленно полученное равенство, получим::

$$\frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t-1} + \frac{5}{3} \int \frac{dt}{t-3} =$$

{для нахождения интегралов применим формулу (3)}

$$= \frac{1}{3} \ln|t| - \ln|t-1| + \frac{5}{3} \ln|t-3| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right| + \frac{5}{3} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 \right| + C;$$

с) $\int \frac{3x dx}{\sqrt{3x^2 - 2} + \sqrt[4]{3x^2 - 2}}.$

Произведем замену: $3x^2 - 2 = t, dt = 6x dx, 3x dx = \frac{1}{2} dt.$

Получим: $\int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{t} + \sqrt[4]{t}} =$

Наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ есть 4,

поэтому введем следующую замену:

$$\left| \begin{array}{l} t = z^4 \\ dt = 4z^3 dz \\ z = \sqrt[4]{t} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{4z^3 dz}{\sqrt{z^4} + \sqrt[4]{z^4}} = 2 \int \frac{z^2}{z^2 + z} dz = 2 \int \frac{z^2}{z(z+1)} dz = 2 \int \frac{z}{z+1} dz =$$

$$= 2 \int \left(1 - \frac{1}{z+1} \right) dz = 2 \int dz - 2 \int \frac{dz}{z+1} =$$

{для нахождения интегралов применим формулы (1) и (3)}

$$= 2z - 2 \ln|z+1| + C = 2\sqrt[4]{3x^2 - 2} - 2 \ln \sqrt[4]{3x^2 - 2} + C;$$

т) $\int \cos 3x \cos 5x dx.$

Найдем интеграл, используя формулу тригонометрических преобразований

$$\cos 3x \cdot \cos 5x = \frac{1}{2} (\cos(3x - 5x) + \cos(3x + 5x)) = \frac{1}{2} (\cos(-2x) + \cos 8x) = \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 8x)$$

Интегрируя полученное равенство и применяя формулу (6), получим:

$$\int \frac{1}{2} (\cos 8x + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} (-\sin 8x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (-\sin 2x) + C = -\frac{1}{16} \sin 8x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

у) $\int \sin^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx =$

$$= \int \frac{1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x}{4} dx = \int \left(\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) = \frac{1}{4} \int \left(1 - 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int dx - 2 \cdot \frac{1}{4} \int \cos 2x dx + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \int \cos 4x dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{8} \int \cos 4x dx = \frac{3}{8} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{8} \int \cos 4x dx$$

{для нахождения интегралов применим формулы (1) и (6)}

$$= \frac{3}{8} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \sin 4x + C = \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C;$$

ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}} =:$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{e^{2x} - 1}, \\ e^{2x} = t^2 + 1, \\ x = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1), \\ dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{t^2 + 1} dt \end{array} \right. = \int \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{t^2 + 1} dt}{t} = \int \frac{dt}{t^2 + 1} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (7)}

$$= \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} \sqrt{e^{2x} - 1} + C.$$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

а) $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 4}}$;

б) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}$

Решение:

а) Несобственный интеграл I рода.

$$\int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 4}} = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 + 4 \\ dt = 2xdx \\ xdx = \frac{1}{2} dt \\ x_1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 4 \\ x_2 = -\infty \Leftrightarrow t_2 = \infty \end{array} \right. = \int_4^{\infty} \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{t}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_4^b \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (2)}

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(t^{\frac{1}{2}} \Big|_4^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\sqrt{t} \Big|_4^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} (\sqrt{b} - 2) = \infty \quad \text{- интеграл расходится.}$$

б) Несобственный интеграл II рода.

$x = 4$ является точкой разрыва подынтегральной функции, поэтому:

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{4-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{4-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{4^2 - x^2}} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (8)}

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\operatorname{arcsin} \frac{x}{4} \Big|_0^{4-\varepsilon} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\operatorname{arcsin} \left(1 - \frac{\varepsilon}{4} \right) - \operatorname{arcsin} 0 \right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{- интеграл}$$

сходится.

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$;

б) длину дуги кривой:

$$\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

в) объем тела, полученного вращением фигуры $y = \sin x$; $y = 0$; $0 \leq x \leq \pi$, вокруг оси Ox .

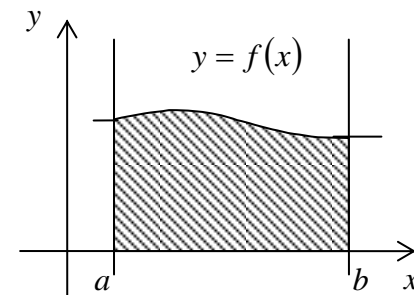
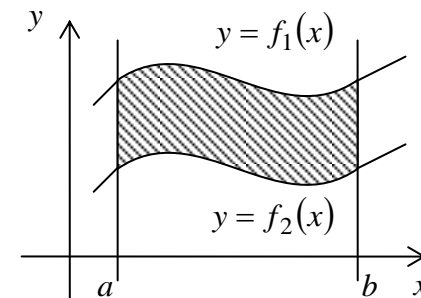
Решение:

а) Существуют несколько формул для вычисления площадей плоских фигур.

- Площадь фигуры, заданной в декартовой системе координат, ограниченной линиями $y = f_1(x)$ - сверху, $y = f_2(x)$ - снизу, слева прямой $x = a$, справа прямой $x = b$ определяется формулой

$$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx$$

-



▪ Площадь фигуры, ограниченной кривой заданной параметрически уравнениями $(y = f(x), x \in [a; b]) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \end{cases} t \in [\alpha; \beta], \text{ определяется формулой } S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t) dt;$$

▪ Площадь фигуры, заданной в полярной системе координат, ограниченной кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, определяется формулой:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

В нашем случае линии, ограничивающие фигуру, заданы в декартовых координатах, поэтому мы будем использовать

$$\text{формулу } S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx$$

Найдем координаты точек пересечения линий:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 1 \Rightarrow a = -1; \quad b = 1.$$

$$S = \int_{-1}^1 ((2 - x^2) - x^2) dx = \int_{-1}^1 (2 - 2x^2) dx = 2 \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx =$$

$$= 2 \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = 2 \left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3} \right) \right) = \frac{8}{3};$$

б) В зависимости от способа задания уравнения кривой существуют следующие формулы нахождения длины дуги кривой.

▪ Для кривой, заданной в декартовых координатах уравнением $y = f(x) \quad x \in [a; b]$ длина дуги находится по формуле

$$l_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx;$$

Для кривой, заданной параметрически уравнениями

$$(y = f(x), x \in [a; b]) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \end{cases} t \in [\alpha; \beta]$$

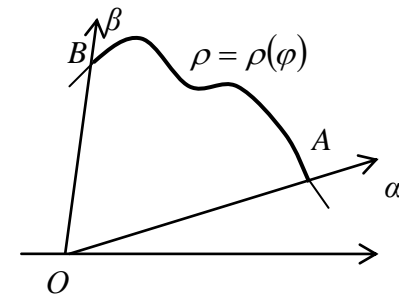
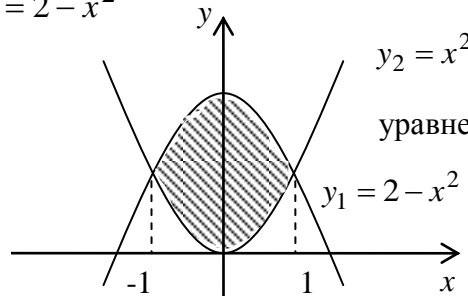
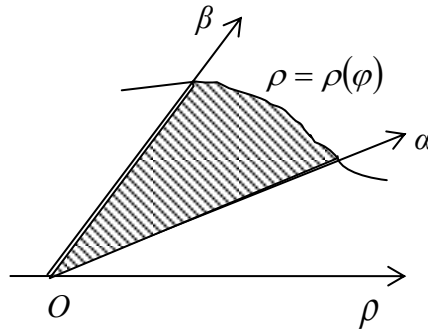
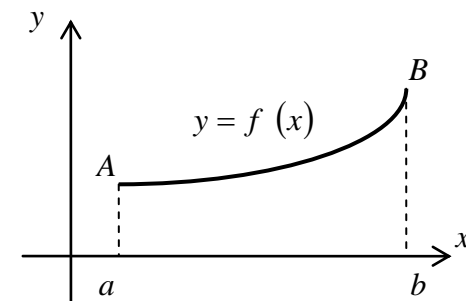
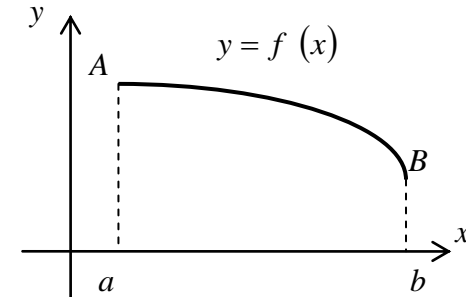
длина дуги находится по формуле

$$l_{AB} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

▪ Для кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi) \quad \varphi \in [\alpha; \beta]$

длина дуги находится по формуле

$$l_{AB} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi.$$



В нашем случае кривая задана параметрически, поэтому для вычисления её длины мы применим формулу

$$l_{AB} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

$$\begin{cases} x = 3(t - \sin t), & x'(t) = 3(1 - \cos t), \\ y = 3(1 - \cos t); & y'(t) = 3 \cdot \sin t. \end{cases}$$

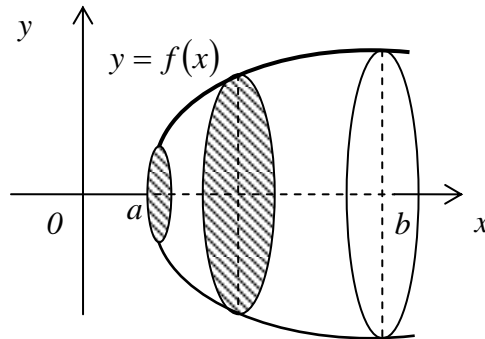
$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{(3(1 - \cos t))^2 + (3 \sin t)^2} dt = 3 \int_0^{\pi} \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt = \left\{ \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \right\} \int_c^d \varphi^2(y) dy.$$

$$= 3 \int_0^{\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = 3 \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = \left\{ 1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2} \right\} = 3 \int_0^{\pi} \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \left(\frac{t}{2} \right)} dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{В условиях нашей задачи } y = \sin x, \\ a = 0, b = \pi. \end{array} \right.$$

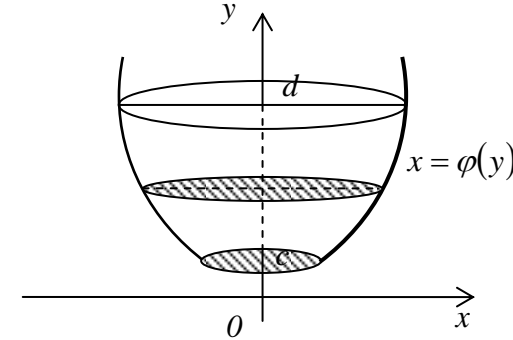
$$= 6 \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -6 \cdot 2 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{\pi} = -12 \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = -12 \cdot (0 - 1) = 12;$$

в) Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $x \in [a; b]$. Тогда объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу Ox , определяется

формулой:
$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

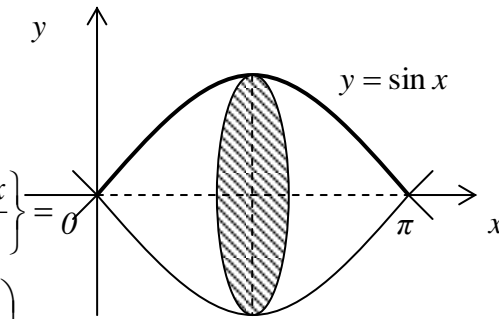


Если криволинейная трапеция ограничена графиком непрерывной функции $x = \varphi(y)$ и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$ ($c < d$), то объём тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Oy , по аналогии равен:



$$V_x = -\pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \left\{ \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \right\} = 0$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi} \cos 2x dx \right) =$$



$$= \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \left(\left(\pi - \frac{1}{2} \sin 2\pi \right) - \left(0 - \frac{1}{2} \sin 0 \right) \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

Вариант 1.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int \left(x^2 - 2x + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx;$ б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}};$ в) $\int \frac{x^2}{(1+3x^3)^2} dx;$

г) $\int \frac{x}{1+3x^2} dx;$ д) $\int \frac{\cos x}{1-2\sin x} dx;$ е) $\int e^{-x^2} x dx;$

ж) $\int \sin 2x dx;$ з) $\int \left(\cos \frac{x}{3} + 1 \right) dx;$ и) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}};$

к) $\int \frac{3^x}{3^{2x} + 1} dx;$ л) $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 4};$ м) $\int x e^{-2x} dx;$

н) $\int x^2 \ln x dx;$ о) $\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2} dx;$ п) $\int \frac{x^4+2}{x^3+3x} dx;$

р) $\int \frac{dx}{1+3\cos x};$ с) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx;$ т) $\int \sin x \cos 2x dx;$

у) $\int \cos^2 x dx;$ ф) $\int (e^x + 2)^3 dx.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x};$ б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной параболой: $y = \frac{x^2}{2} - x + 1$ и

$y = -\frac{x^2}{2} + 3x + 6$

б) длину дуги кривой: $y = \ln x$ от точки с абсциссой $x_1 = \frac{3}{4}$ до точки

$x_2 = 2,4;$

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной гиперболой $y = \frac{6}{x}$, осью OY и прямыми $y = 1$ и $y = 6$.

Вариант 2.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int \left(x^4 - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3} - 11 \right) dx;$ б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}};$ в) $\int \frac{x dx}{(5x^2 + 1)^2};$

г) $\int 7^x \sqrt{3 \cdot 7^x + 4} dx;$ д) $\int \frac{x^2}{1+3x^3} dx;$ е) $\int \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 4} dx;$

ж) $\int \sin 5x dx;$ з) $\int \frac{dx}{1+3x^2};$ и) $\int \operatorname{tg} 3x dx;$

к) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}};$ л) $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 3};$ м) $\int (x+3)e^{2x} dx;$

н) $\int x \arccos x dx;$ о) $\int \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x} dx;$ п) $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 - 4} dx;$

р) $\int \frac{dx}{2-2\sin x};$ с) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1} + \sqrt[4]{3x+1}};$ т) $\int \cos 3x \sin 2x dx;$

у) $\int \sin^4 x \cdot \cos x^5 dx;$ ф) $\int \sqrt{e^x + 1} dx.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$а) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}};$$

$$б) \int_0^{\infty} \frac{xdx}{x^2+4}.$$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, заключенной между кривой $y = 4 - x^2$ и осью Ox ;

б) длину дуги кривой $y = 1 - \ln \cos x$ в пределах от $x_1 = 0$ до $x_2 = \frac{\pi}{4}$;

в) объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривыми $y = \frac{2}{1+x^2}$.

Вариант 3.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$а) \int \left(x^2 - \sqrt[4]{x^3} + \frac{2}{x} - 3 \right) dx;$$

$$б) \int \frac{dx}{\sqrt{x+3}};$$

$$в) \int \frac{x^2}{(1-4x^3)^2} dx;$$

$$г) \int \frac{x dx}{x^2+5};$$

$$д) \int \frac{\cos 3x}{1+\sin 3x} dx;$$

$$е) \int e^{-2x^2} \cdot x dx;$$

$$ж) \int a^{3x} dx;$$

$$з) \int (2 + \sin 2x) dx;$$

$$и) \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx;$$

$$к) \int 2^x \operatorname{tg} 2^x dx;$$

$$л) \int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}} dx;$$

$$м) \int xe^x dx;$$

о)

$$н) \int x \arcsin 5x dx;$$

$$\int \frac{x^2+2x-2}{x^3-9x} dx;$$

$$п) \int \frac{x^3+1}{x^3-2x} dx;$$

$$р) \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x};$$

$$с) \int \frac{\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}} dx;$$

$$т) \int \cos 4x \cdot \cos 5x dx;$$

$$у) \int \sin^3 x dx;$$

$$ф) \int (e^x - 4)^2 dx.$$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$а) \int_0^{\infty} e^{-x} dx;$$

$$б) \int_0^1 \ln x dx.$$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной линией $y = x^2 - 5$, осью Ox и осью Oy ($y < 0$);

б) длину дуги кривой $y = \frac{1}{3}(x-3)\sqrt{x}$ между точками пересечения её с Ox ;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y = 3x^2 + 1$ и прямой $y = 3x + 7$.

Вариант 4.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$а) \int \left(1 - 2\sqrt[3]{x} + \frac{7}{x^4} \right) dx;$$

$$б) \int \frac{dx}{\sqrt{1+2x}};$$

$$в) \int \frac{xdx}{(3+x^2)^3};$$

$$г) \int \frac{\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx;$$

$$д) \int \frac{x^2}{1+4x^3} dx;$$

$$е) \int \frac{e^x}{1-2e^x} dx;$$

$$ж) \int e^{-x^3} x^2 dx;$$

$$з) \int \sin 2x dx;$$

$$и) \int \frac{dx}{\cos^2 3x};$$

к) $\int \frac{x dx}{\sin x^2};$	л) $\int \frac{dx}{5+4x^2};$	м) $\int (x+2)\cos 5x dx;$	а) $\int \left(x^4 - \frac{1}{2}x + \sqrt[3]{3x}\right) dx;$	б) $\int \frac{xdx}{(1+x^2)^5};$	в) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}};$
н) $\int \arcsin 4x dx;$	о) $\int \frac{x-3}{x^3+8} dx;$	п) $\int \frac{x^3-2}{x^3+2x^2+x} dx;$	г) $\int \frac{dx}{x+3};$	д) $\int \frac{\cos x}{1+3\sin x} dx;$	е) $\int e^{2x} dx;$
р) $\int \frac{dx}{2+\sin x};$	с) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}} dx;$	т) $\int \sin x \cdot \cos 3x dx;$	ж) $\int 2^{-x^2} x dx;$	з) $\int (1-\sin 3x) dx;$	и) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x};$
у) $\int \cos^4 x dx;$	ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+e^x}}.$		к) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx;$	л) $\int \operatorname{tg} 3x dx;$	м) $\int (x+5)e^{2x} dx;$
			н) $\int x^7 \ln x dx;$	о) $\int \frac{x+2}{x^3-x^2-2x} dx;$	п) $\int \frac{x^4-3}{x^2-25} dx;$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}};$	б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+11}.$
---------------------------------------	---

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^2 - 4$ и прямыми $y = 0$, $x = -1$ ($x \geq -1$);

б) длину одной арки циклоиды: $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases};$

в) объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{1}{4}x^2$, прямой $x = 4$ и осью Ox .

Вариант 5.

Задание 1: Вычислить интегралы:

р) $\int \frac{dx}{\cos x + 3\sin x};$	с) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1} + \sqrt[4]{3x+1}};$	т) $\int \cos 3x \sin 2x dx;$
у) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx;$	ф) $\int \sqrt{4+e^x} dx.$	

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_2^{\infty} \frac{xdx}{x^2+4};$	б) $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}.$
---	-----------------------------------

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной гиперболой $xy = 9$, осью OX и прямыми $x = 3$ и $x = 6$;

б) длину дуги одного оборота спирали Архимеда $\rho = 3\varphi$;

в) объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной полуэллипсом $y = 3\sqrt{1-x^2}$, параболой $x = \sqrt{1-y}$ и осью Oy .

Вариант 6.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int \left(2x^7 - \frac{3}{\sqrt{x}} + e^x \right) dx;$ б) $\int \frac{x^2 dx}{(1+3x^3)^3};$ в) $\int \sqrt{1-5x} dx;$

г) $\int \frac{\arctg^2 x}{1+x^2} dx;$ д) $\int \frac{e^x}{e^x+4} dx;$ е) $\int e^{\sin 2x} \cos 2x dx;$

ж) $\int 2^{-x^2} x dx;$ з) $\int \frac{dx}{\sin^2 3x};$ и) $\int \operatorname{tg} 2x dx;$

к) $\int \frac{e^x}{\sin e^x} dx;$ л) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}};$ м) $\int x \cos 2x dx;$

н) $\int 3x^2 \ln(x+2) dx;$ о) $\int \frac{2-3x}{x^3-4x} dx;$ п) $\int \frac{x^3+2}{x^2-2x+3} dx.$

р) $\int \frac{dx}{\sin x - 2 \cos x};$ с) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-4} + \sqrt[4]{5x^2-4}};$ т) $\int \sin 2x \cdot \cos 7x dx;$

у) $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx;$ ф) $\int (5+e^x)^2 dx.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}};$ б) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x+1)^4}.$

Задание 3: Вычислить:

- а) площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^x - 1$, $y = e^{2x} - 3$ и осью Oy ;
- б) длину дуги кривой $y = \frac{1}{3}x\sqrt{x}$ от $x_1 = 0$ до $x_2 = 12$;
- в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sqrt{\arctg x}$ и прямыми $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x_2 = \sqrt{3}$.

Вариант 7.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{x^3 - 2\sqrt{x^3} + 3\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} dx;$ б) $\int \frac{x^2 dx}{(1-2x^3)^2};$ в) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}};$

г) $\int \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} dx;$ д) $\int \frac{x}{4x^2 - 3} dx;$ е) $\int e^{\cos 3x} \sin 3x dx;$

ж) $\int 2^{-3x^2} x dx;$ з) $\int \sin \frac{x}{5} dx;$ и) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x};$

к) $\int \operatorname{tg}(1-x) dx;$ л) $\int \frac{2^x dx}{4^x + 1};$ м) $\int x \sin 3x dx;$

н) $\int x \cdot \arctg x dx;$ о) $\int \frac{x+3}{x^3+10x^2+25x} dx;$ п) $\int \frac{x^5+3x^2}{x^2+x} dx;$

р) $\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x + \sin x} dx;$ с) $\int \frac{\sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}} dx;$ т) $\int \sin x \cdot \sin 3x dx;$

у) $\int \cos^2 x \cdot \sin^3 x dx;$ ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 9}}.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 8};$ б) $\int_1^e \frac{dx}{x \ln^3 x}.$

Задание 3: Вычислить:

- а) площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 2x$ и прямой $y = x + 2$;
- б) длину дуги полукубической параболы $ay^2 = x^3$ от начала координат до точки с абсциссой $x = 5a$;
- в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной одной волной синусоиды $y = \sin 4x$ и осью Ox .

Вариант 8.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int \left(2\sqrt{x} - \frac{3}{x^2} + 1 \right) dx;$ б) $\int \sqrt{2x + 3} dx;$ в) $\int \frac{x}{(1 + 4x^2)^2} dx;$

г) $\int \frac{dx}{5 - x};$ д) $\int \frac{dx}{4x - x \ln x};$ е) $\int x e^{x^2 - 3} x dx;$

ж) $\int x \cos 2x^2 dx;$ з) $\int \left(1 - \sin \frac{x}{5} \right) dx;$ и) $\int \operatorname{ctg} 2x dx;$

к) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx;$ л) $\int \frac{x dx}{4 + x^4};$ м) $\int e^{2x} \cos x dx;$

н) $\int \operatorname{arctg} 3x dx;$ о) $\int \frac{x^2 - x + 2}{x^3 + 4x^2 + 3x} dx;$ п) $\int \frac{x^2 - x + 2}{x^3 + 4x^2 + 3x} dx;$

р) $\int \frac{dx}{3 - 2 \cos x};$ с) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1 + 2\sqrt{x}} dx;$ т) $\int \sin x \cdot \sin 3x dx;$

у) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx;$ ф) $\int \sqrt{e^x - 3} dx.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 8}}.$ б) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{\ln x}}.$

Задание 3: Вычислить:

- а) площадь фигуры, ограниченной параболой: $y^2 = 4x$ и $x^2 = 4y$;
- б) длину дуги полукубической параболы $y = \sqrt{(x - 2)^3}$ от точки $A(2; 0)$ до точки $B(6; 8)$;
- в) объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$ вокруг оси Oy .

Вариант 9.**Задание 1:** Вычислить интегралы:

а) $\int \left(2 - 3\sqrt[5]{x^4} + \frac{1}{x^3} \right) dx;$ б) $\int \frac{xdx}{(1+3x^2)^5};$ в) $\int \sqrt{1-2x} dx;$

г) $\int \frac{x^2}{1+2x^3} dx;$ д) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3} dx;$ е) $\int e^{-x^3} x^2 dx;$

ж) $\int \sqrt{3^x} \sqrt{5^x} dx;$ з) $\int \frac{x^3}{\sin^2 x^4} dx;$ и) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos x} dx;$

к) $\int \frac{dx}{\sin^2 4x};$ л) $\int (2-3\cos 2x) dx;$ м) $\int (1-x^2) \sin 3x dx;$

н) $\int \ln(x^2+5) dx;$ о) $\int \frac{x^2+4x}{x-x^2-2x^3} dx;$ п) $\int \frac{x^4}{1-x^2} dx;$

р) $\int \frac{dx}{a \sin x + 3 \cos x};$ с) $\int \frac{\sqrt{x}}{4-4\sqrt{x}} dx;$ т) $\int \sin 2x \cdot \sin 8x dx;$

у) $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx;$ ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-e^x}}.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx;$ б) $\int_0^1 \frac{dx}{x+x^2}.$

Задание 3: Вычислить:

- а) площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = 2x + 5$, $y = \frac{x^2}{6}$;
- б) длину дуги кардиоиды $\rho = 5(1 + \cos \varphi)$;
- в) объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{1}{2}x^2$, прямой $y = 4 - x$, $x = 0$ вокруг оси Oy .

Вариант 10.**Задание 1:** Вычислить интегралы:

а) $\int \left(\sqrt{x} - 2x^3 - \frac{1}{x^2} \right) dx;$ б) $\int (1 - \sin 2x)^5 \cos 2x dx;$ в) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}};$

г) $\int \frac{x^3 dx}{1+4x^4};$ д) $\int \frac{\sin x}{1+2\cos x} dx;$ е) $\int 2^{-x^3} x^2 dx;$

ж) $\int (e^x + 1)^2 dx;$ з) $\int e^x \sin e^x dx;$ и) $\int \cos 3x dx;$

к) $\int \frac{dx}{\sin^2(1-x)};$ л) $\int \cos 2x \sin 3x dx;$ м) $\int e^{-2x} (2x+5) dx;$

н) $\int (\sin^2 x + 1) x dx;$ о) $\int \frac{x+4}{x^3 - 2x^2 + 3x} dx;$ п) $\int \frac{x^4 + x}{27 + x^3} dx;$

р) $\int \frac{\cos x}{1 + \cos x - \sin x} dx;$ с) $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + 3\sqrt[4]{x}} dx;$ т) $\int \sin 5x \cdot \cos 8x dx;$

у) $\int \cos^5 x dx;$ ф) $\int (e^x - 3)^2 dx.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

б) $\int_2^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2+5)^3}}$.

Задание 3: Вычислить:

- а) площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \ln x$ и прямыми $x = e$, $x = e^2$ и $y = 0$;
- б) площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox параболы $y^2 = 2x + 1$ от $x_1 = 1$ до $x_2 = 7$;
- в) объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугров, Я.С. Высшая математика / Я.С.Бугров, С.М. Никольский. Учеб. для вузов в 3т. –5-е изд., стер. – М.: Дрофа . – (Высшее образование. Современный учебник). Т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление. – 2003. – 509 с.
2. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализ / Г.Н. Берман. Учеб. пособие. 22-е изд., перераб. – СПб: Профессия, 2003. – 432 с.
3. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах (с решениями) / Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. в 2 ч. –6-е изд. – М.: ОНИКС 21 век, ч .2. –2002. –416 с.
4. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н.С. Пискунов. Учеб. пособие: в 2-х т. – Изд. стер. –М.: Интеграл – Пресс. Т.1. –2001. – 415 с.
5. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике / Д.Т. Письменный. 1 часть. – 2-е изд., испр. – М.: Айрис –пресс, 2002. – 288 с.: ил.

Ахполова З.А., Кокоева З.Т., Дзарахохов А.В.

МАТЕМАТИКА

ИНТЕГРАЛЫ

Учебно-методическое- пособие
для обучающихся по образовательным
программам среднего профессионального образования

Лицензия: ЛР. № 020574 от 6 мая 1998 г.

Бумага формат А4. Усл. печ. л. 6.37.

Электронная версия

362040, Владикавказ, ул. Кирова, 37.
Типография ФГБОУ ВО Горский ГАУ