

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Горский государственный аграрный университет»

ФГБОУ ВО Горский ГАУ

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

для обучающихся по специальности

35.02.16 Эксплуатация и ремонт сельскохозяйственной техники и оборудования

УДК 531.8 (07)
ББК 30.12

Составитель: Бичегкуева Д.М.

Техническая механика: методическое пособие для обучающихся по специальности 35.02.16 Эксплуатация и ремонт сельскохозяйственной техники и оборудования / Составитель: Д. Бичегкуева. — Владикавказ ФГБОУ ВО Горский ГАУ, 2025. — 76 с.

Методическое пособие разработано в соответствии с требованиями ФГОС СПО по специальности 35.02.16 Эксплуатация и ремонт сельскохозяйственной техники и оборудования и рабочей программой дисциплины "Техническая механика".

Цель пособия — обеспечить методическую поддержку освоения теоретического материала и формирования практических навыков.

Рекомендовано УМС ФГБОУ ВО Горский ГАУ в качестве методического пособия (от 7 октября 2025 г., протокол №3)

©: Бичегкуева Д.М.
© ФГБОУ ВО Горский ГАУ, 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.....	5
1.1 Статика.....	5
1.2 Кинематика.....	46
1.3 Динамика.....	61
Библиографический список.....	74

ВВЕДЕНИЕ

Что такое Техническая механика?

Механика - это наука о механическом движении и взаимодействии материальных тел.

Техническая механика является одним из разделов Механики, в котором изучаются законы движения тел и общие свойства этих движений.

На основе этих закономерностей разработаны методы и приемы технической механики, позволяющие конструировать сооружения, механизмы и машины, а также производить практические расчеты различных технических и строительных конструкций на прочность, устойчивость, жесткость, т. е. - на работоспособность в заданном интервале нагрузок.

Учебная дисциплина "Техническая механика", изучаемая студентами аграрного колледжа ФГБОУ ВО Горский ГАУ в пределах рабочих программ для технических специальностей, включает следующие разделы:

- ◆ *Теоретическая механика*
- ◆ *Сопротивление материалов*
- ◆ *Детали и механизмы машин*

Изучение каждого последующего раздела Технической механики для техникумов предполагает знание обучающимся предыдущих разделов, а также базовые знания по общеобразовательным дисциплинам - математике, геометрии, физике.

Теоретическая механика

Раздел "Теоретическая механика" состоит из подразделов:

- ◆ Статика
- ◆ Кинематика
- ◆ Динамика

"Статика" является частью Теоретической механики, изучающей условия, при которых тело находится в равновесии. При этом равновесием считается такое состояние тела, когда оно находится в покое или движется прямолинейно и равномерно.

Методы и приемы, применяемые для решения задач Статики, позволяют определить внешние силовые факторы, благодаря которым тело находится в состоянии равновесия, т. е. по известным значениям внешних сил или моментов, приложенных к телу, осуществить расчет неизвестных силовых факторов (сил, моментов), воздействующих на данное тело.

Выполнение таких расчетов необходимо для осуществления оценки работоспособности конструкций различных сооружений или механизмов при помощи методов и приемов, применяемых в науке "Сопротивление материалов".

"Кинематика" является частью Теоретической механики, и изучает законы движения материальных тел без учета силовых факторов, вызывающих это движение, т. е. с геометрической точки зрения. Задачи Кинематики сводятся к определению положения тела в пространстве относительно какойлибо системы отсчета в определенный момент времени или через временной промежуток.

Методы и приемы, применяемые при решении задач Кинематики, позволяют производить кинематические расчеты сложных механизмов машин, в которых отдельные детали и узлы совершают относительные перемещения при работе.

"Динамика", в отличие от Кинематики, изучает законы движения материальных тел с учетом силовых факторов, вызывающих это движение.

Методы и приемы, применяемые в Динамике, позволяют производить расчеты движения и перемещения деталей, узлов и механизмов машин, вызываемых приложенными нагрузками и реакциями.

1. Теоретическая механика

1.1 Статика

Статика - часть теоретической механики, изучающая условия, при которых тело находится в равновесии. При этом равновесием считается такое состояние тела, когда оно находится в покое (т. е. без движения) или движется прямолинейно и равномерно (т. е. с постоянной скоростью).

Основные понятия и определения статики

Абсолютно твердое (или абсолютно жесткое) тело - это такое тело, расстояние между любыми его точками не меняется в результате действия на него других тел.

Абсолютно твердых тел в природе не существует, но во многих случаях изменение размеров и формы (*деформация*) тел настолько незначительны, что ими можно пренебречь. В теоретической механике (в т. ч. и в статике) при решении многих задач тела предполагаются абсолютно твердыми, и их физикомеханические свойства не учитываются (за исключением расчетов, связанных с силами трения).

Материальная точка - это такая точка в пространстве, которая обладает некоторой массой и практически не имеет размеров (т. е. размеры материальной точки при расчетах не учитываются).

В статике и теоретической механике при решении задач многие тела рассматриваются, как материальные точки, т. е. их размерами пренебрегают. Это позволяет значительно упростить расчеты при минимальной погрешности, вызываемой подобными условностями. Например, в астрономии, звезды рассматриваются, как материальные точки, несмотря на то, что они имеют колоссальные (по нашим меркам) размеры. При этом перемещение звезд в пространстве может быть рассчитано с высокой степенью точности.

Следует отметить, что одни и те же тела при решении задач технической механики (в зависимости от постановки задачи) могут рассматриваться либо, как материальная точка, либо, как тело, раз-

меры которого необходимо учитывать. Всякое тело можно считать взаимосвязанной системой (*совокупностью*) материальных точек. При этом абсолютно твердое тело представляет собой неизменяемую систему материальных точек.

Тела в природе различным образом взаимодействуют между собой или окружающей средой. Механическое взаимодействие тел, влияющее на их состояние покоя или движения (*механическое состояние*), характеризуется силой.

Сила - это мера механического взаимодействия тел между собой.

Сила характеризуется тремя элементами: числовым значением (*модулем*), направлением и точкой приложения, т. е. сила - величина векторная. При этом числовое значение силы называют модулем вектора силы.

Направлением силы считается направление, в котором перемещалось бы изначально покоящееся (*неподвижное*) тело, под действием этой силы. Прямая линия, вдоль которой направлен вектор силы, называется **линией действия силы**.

Точкой приложения называют условную точку материального тела, к которой непосредственно

приложена сила. Во многих расчетах по технической механике точка приложения оказывает решающее значение на результат силового воздействия - от нее будет зависеть характер движения тела - прямолинейное, по сложной траектории, либо тело будет просто вращаться вокруг центра тяжести. Есть задачи, в которых точка приложения силы не столь существенна, при этом силу разрешается даже перемещать вдоль линии ее действия, не вызывая изменения механического состояния материального тела.

Графически силу определяют отрезком прямой со стрелкой, при этом начало отрезка совпадает с точкой приложения силы, а его длина в определенном масштабе равна модулю вектора силы.

В соответствии с Международной системой единиц (*СИ*) в качестве единицы силы принят **ньютон** (*H*). Ньютон - сила сообщающая телу массой *1 кг* ускорение *1 м/сек²* в направлении действия силы.

Совокупность тел (*в т. ч. и материальных точек*) взаимодействующих между собой, называется **системой тел**. Силы взаимодействия между телами одной системы называют **внутренними силами**, а силы, воздействующие на систему со стороны других тел или других систем - **внешними силами**. Следует отметить, что деление сил на внешние и внутренние является условным, и зависит от постановки задачи и даже метода ее решения.

Если данную систему сил рассечь на части и рассматривать равновесие каждой из частей в отдельности, то многие внутренние силы цельной системы станут для отдельных ее частей внешними.

Условное (*мысленное*) расчленение системы тел (*или точек*) на отдельные составляющие части называют **методом сечений**. Этот метод широко используется при решении многих задач технической механики, и позволяет определить внутренние силы, действующие в системе.

Статика при решении задач условия равновесия тел или материальных точек оперирует понятиями свободных и несвободных тел.

Свободным называется тело, если никакие другие тела не препятствуют его перемещению в любом направлении (*прямо- и криволинейном движении, вращении, кувыркании и т. п.*).

Примером свободного тела может быть, например, летящий самолет, поскольку он может перемещаться в любом пространственном направлении - вверх, в стороны, вниз и т. п., не встречая преград в виде других тел на пути.

Если же тело из-за противодействия со стороны другого тела (*или системы тел*) не может перемещаться в одном или нескольких направлениях, то такое тело называют **несвободным** или **связанным**.

Простейшим примером связанного (*несвободного*) тела является лежащая на столе книга (*или какой-либо другой предмет*) - ее можно перемещать в любом направлении, кроме одного - вниз, поскольку этому противодействует связь со стороны столешницы.

Понятие абсолютно свободного тела также абстрактно, как и понятие абсолютно жесткого или абсолютно покоящегося (*неподвижного*) тела. В природе не существует абсолютно свободных тел, поскольку все тела и материальные точки, имеющие массу, подвержены силовому взаимодействию между собой. Даже самая ничтожная пылинка на краю Вселенной оказывает силовое воздействие на пылинку, витающую близ поверхности Земли, тем самым связывая ее. Летящий в небе самолет нельзя назвать абсолютно свободным - на его перемещение оказывают влияние сопротивление атмосферы, силы притяжения Земли, силы инерции, электромагнитные воздействия со стороны нашей планеты и т. п.

Тем не менее, при решении практических задач статики или других разделов технической механики несущественные связи между телами и материальными точками не учитываются, что приводит к ничтожно малым погрешностям в расчетах. Очевидно, что возникшая на пути летящего самолета твердая преграда окажет связующее влияние несравненно большее, чем воздушный поток. Поэтому в статике свободным считается тело, которое не испытывает ощутимых препятствий своему перемещению или движению в любом направлении.

Аксиомы статики

Как мы уже знаем, статика изучает условия, при которых тело или материальная точка находятся в равновесии.

При решении задач статики принимают без доказательств некоторые положения, подтвержденные опытным путем, которые называют аксиомами статики. Основные аксиомы статики были сформулированы английским ученым **И. Ньютоном** (1642-1727), и поэтому названы его именем.

Исаак Ньютон (Isaac Newton) - английский физик, математик, механик и астроном, один из создателей классической физики. Автор фундаментального труда "Математические начала натуральной философии", в котором он изложил закон всемирного тяготения и три закона механики, ставшие основой классической механики.

И. Ньютон заложил фундамент теории цвета и физической оптики, разработал дифференциальное и интегральное исчисления, создал многие другие математические и физические теории, не потерявшие актуальность и в настоящее время. Сложно переоценить вклад этого гения в развитие естественных наук.

Аксиома I (*аксиома инерции, или первый закон Ньютона*): **всякое тело сохраняет свое состояние покоя или прямолинейного равномерного движения, пока какие-нибудь силы не выведут тело из этого состояния.**

Способность материальных тел сохранять движение при отсутствии действующих сил или постепенно изменять это движение, когда на тело начинают действовать силы, называют **инертностью** или **инерцией**. Инертность - одно из основных свойств материи. На основании этой аксиомы можно считать, что состояние равновесия - это такое состояние, когда тело находится в состоянии полного покоя или движется по инерции.

Аксиома II (*аксиома взаимодействия или третий закон Ньютона*): **Силы взаимодействия между двумя телами всегда равны по модулю и направлены по соединяющей их прямой в противоположные стороны.**

Часто употребляют упрощенную формулировку этого закона - действие всегда равно противодействию.

Из третьего закона Ньютона следует, что в природе все силы являются парными, поскольку одностороннего механического воздействия одного тела на другое не существует.

Совокупность сил, приложенных к данному телу (или системе тел) называется системой сил. Следует отметить, что силовое воздействие какого-либо тела на другое тело и вызванное этим противодействие не являются системой сил, поскольку приложены к разным телам.

Если какая-нибудь система сил обладает таким свойством, что после приложения к свободному телу она не изменяет его механическое состояние (покоя или движения), то такая система сил называется уравновешенной.

Аксиома III (*условие равновесия двух сил*): **для равновесия свободного твердого тела, находящегося под действием двух сил, необходимо и достаточно, чтобы эти силы были равны по модулю и действовали по одной прямой в противоположные стороны.**

Условие, сформулированное в этой аксиоме, является необходимым для равновесия двух сил. Это значит, что если система двух сил находится в равновесии, то эти силы должны быть равны по модулю и действовать по одной прямой в противоположные стороны.

Условие, сформулированное в этой аксиоме, является достаточным для равновесия двух сил. Это значит, что справедлива и обратная формулировка аксиомы: если две силы равны по модулю и действуют по одной прямой в противоположные стороны, то такая система сил обязательно находится в равновесии.

Аксиома IV: равновесие (*как и любое другое механическое состояние*) **твердого тела не нарушится, если к нему приложить или от него удалить уравновешенную систему сил.**

Из третьей и четвертой аксиом статики вытекает следствие: *механическое состояние твердого тела не нарушится, если какую-либо из сил, воздействующих на него, перенести вдоль линии действия этой силы.*

Это следствие легко доказывается, поскольку мы можем приложить вдоль линии действия любой силы (назовем ее исходной силой) две уравновешивающие друг друга силы, каждая из которых равна по модулю исходной силе. При этом механическое состояние тела не изменится. После этого мы можем отнять от тела уравновешенную систему сил, среди которых одна будет являться исходной силой, а вторая принадлежать введенной уравновешенной системе двух сил. При этом, опять же, механическое состояние тела не изменится, несмотря на то, что сила, оставшаяся на линии действия исходной силы, будет приложена уже к другой точке.

Прикладывая таким образом произвольное количество уравновешенных сил вдоль линии действия исходной силы, убедимся, что исходную силу можно перемещать в любую точку на линии ее действия, и механическое состояние тела при этом не изменится.

Следует отметить, что перенос силы вдоль линии ее действия можно осуществлять лишь в том случае, если тело рассматривается, как абсолютно твердое.

Две различные системы сил называют **эквивалентными**, если одну из них можно заменить

другой, не нарушая механического состояния свободного твердого тела. Опять же - если рассматриваемое тело не является абсолютно твердым, то эквивалентные системы сил могут вызывать различную деформацию этого тела, что необходимо учитывать при расчетах.

Сила, эквивалентная данной системе сил, называется *равнодействующей*, а силы этой системы - составляющими этой равнодействующей.

Сила, которая уравнивает данную систему сил, называется *уравновешивающей* для этой системы.

Очевидно, что равнодействующая и уравновешивающая силы одной и той же системы равны по модулю и направлены в противоположные стороны вдоль одной прямой. Равнодействующая уравновешенной системы сил равна нулю, иначе говоря - уравновешенная система сил эквивалентна нулю.

Аксиома V (аксиома параллелограмма): *равнодействующая двух сил, приложенных к телу в одной точке, равна по модулю и совпадает по направлению с диагональю параллелограмма, построенного на данных силах, и приложена в той же точке.*

Построение диагонали параллелограмма, сторонами которого являются заданные векторы, называется *векторным* или *геометрическим сложением*. Таким образом, можно сказать, что равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке, равна их векторной сумме и приложена в той же точке. Равнодействующую двух сил можно найти, построив вместо параллелограмма сил треугольник сил, при этом порядок сложения векторов на величину равнодействующей не влияет.

Модуль и направление равнодействующей двух сил можно найти и *аналитическим способом*, применив к треугольнику сил теоремы косинусов и синусов.

Можно рассмотреть частные случаи сложения двух сил, если угол между их векторами равен φ :

♦ $\varphi = 0^\circ$, т. е. силы направлены вдоль одной прямой в одну сторону: равнодействующая этих сил будет равна их сумме.

♦ $\varphi = 180^\circ$, т. е. силы направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны: равнодействующая этих сил будет равна их разности.

♦ $\varphi = 90^\circ$, т. е. силы направлены под прямым углом друг к другу: равнодействующая может быть определена при помощи теоремы Пифагора.

Принцип отвердевания

Принцип отвердевания формулируется так: *механическое состояние нетвердого тела не нарушится, если оно станет абсолютно твердым.*

Приведем примеры, поясняющие данную аксиому. Если жидкость в сосуде находится в состоянии равновесия, то оно не нарушится и после замерзания жидкости.

Еще один пример: гибкая нить, находящаяся в равновесии под действием двух растягивающих сил останется в равновесии, если нить станет абсолютно твердой.

Обратная формулировка принципа отвердевания в общем случае несправедлива, т. е. если твердое тело находится в равновесии, то, превратившись в нетвердое, оно может выйти из состояния равновесия. Это означает, что условия равновесия твердого тела являются необходимыми, но не достаточными для равновесия нетвердого тела, и требуются дополнительные условия, учитывающие те или иные физические свойства тела или характер воспринимаемых телом нагрузок.

Так, например, при растяжении гибкой невесомой нити необходимо обеспечить условия равновесия двух сил, но нужно помнить, что нить может сопротивляться растяжению, но не может сопротивляться сжатию.

Аксиома IV: равновесие (как и любое другое механическое состояние) **твердого тела не нарушится, если к нему приложить или от него удалить уравновешенную систему сил.**

Из третьей и четвертой аксиом статики вытекает следствие: *механическое состояние твердого тела не нарушится, если какую-либо из сил, действующих на него, перенести вдоль линии действия этой силы.*

Это следствие легко доказывается, поскольку мы можем приложить вдоль линии действия любой силы (назовем ее исходной силой) две уравновешивающие друг друга силы, каждая из которых равна по модулю исходной силе. При этом механическое состояние тела не изменится. После этого мы можем отнять от тела уравновешенную систему сил, среди которых одна будет являться исходной силой, а вторая принадлежать введенной уравновешенной системе двух сил. При этом, опять же, механическое состояние тела не изменится, несмотря на то, что сила, оставшаяся на линии действия исходной силы, будет приложена уже к другой точке.

Прикладывая таким образом произвольное количество уравновешенных сил вдоль линии действия исходной силы, убедимся, что исходную силу можно перемещать в любую точку на линии ее действия, и механическое состояние тела при этом не изменится.

Следует отметить, что перенос силы вдоль линии ее действия можно осуществлять лишь в том случае, если тело рассматривается, как абсолютно твердое.

Две различные системы сил называют **эквивалентными**, если одну из них можно заменить другой, не нарушая механического состояния свободного твердого тела. Опять же - если рассматриваемое тело не является абсолютно твердым, то эквивалентные системы сил могут вызывать различную деформацию этого тела, что необходимо учитывать при расчетах.

Сила, эквивалентная данной системе сил, называется **равнодействующей**, а силы этой системы - составляющими этой равнодействующей.

Сила, которая уравновешивает данную систему сил, называется **уравновешивающей** для этой системы.

Очевидно, что равнодействующая и уравновешивающая силы одной и той же системы равны по модулю и направлены в противоположные стороны вдоль одной прямой. Равнодействующая уравновешенной системы сил равна нулю, иначе говоря - уравновешенная система сил эквивалентна нулю.

Аксиома V (аксиома параллелограмма): равнодействующая двух сил, приложенных к телу в одной точке, равна по модулю и совпадает по направлению с диагональю параллелограмма, построенного на данных силах, и приложена в той же точке.

Построение диагонали параллелограмма, сторонами которого являются заданные векторы, называется **векторным** или **геометрическим сложением**. Таким образом, можно сказать, что равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке, равна их векторной сумме и приложена в той же точке. Равнодействующую двух сил можно найти, построив вместо параллелограмма сил треугольник сил, при этом порядок сложения векторов на величину равнодействующей не влияет.

Модуль и направление равнодействующей двух сил можно найти и **аналитическим способом**, применив к треугольнику сил теоремы косинусов и синусов.

Можно рассмотреть частные случаи сложения двух сил, если угол между их векторами равен φ :

♦ $\varphi = 0^\circ$, т. е. силы направлены вдоль одной прямой в одну сторону: равнодействующая этих сил будет равна их сумме.

♦ $\varphi = 180^\circ$, т. е. силы направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны: равнодействующая этих сил будет равна их разности.

♦ $\varphi = 90^\circ$, т. е. силы направлены под прямым углом друг к другу: равнодействующая может

быть определена при помощи теоремы Пифагора.

Принцип отвердевания

Принцип отвердевания формулируется так: ***механическое состояние нетвердого тела не нарушится, если оно станет абсолютно твердым.***

Приведем примеры, поясняющие данную аксиому. Если жидкость в сосуде находится в состоянии равновесия, то оно не нарушится и после замерзания жидкости.

Еще один пример: гибкая нить, находящаяся в равновесии под действием двух растягивающих сил останется в равновесии, если нить станет абсолютно твердой.

Обратная формулировка принципа отвердевания в общем случае несправедлива, т. е. если твердое тело находится в равновесии, то, превратившись в нетвердое, оно может выйти из состояния равновесия. Это означает, что условия равновесия твердого тела являются необходимыми, но не достаточными для равновесия нетвердого тела, и требуются дополнительные условия, учитывающие те или иные физические свойства тела или характер воспринимаемых телом нагрузок.

Так, например, при растяжении гибкой невесомой нити необходимо обеспечить условия равновесия двух сил, но нужно помнить, что нить может сопротивляться растяжению, но не может сопротивляться сжатию.

Аксиома IV: равновесие (как и любое другое механическое состояние) твердого тела не нарушится, если к нему приложить или от него удалить уравновешенную систему сил.

Из третьей и четвертой аксиом статики вытекает следствие: *механическое состояние твердого тела не нарушится, если какую-либо из сил, воздействующих на него, перенести вдоль линии действия этой силы.*

Это следствие легко доказывается, поскольку мы можем приложить вдоль линии действия любой силы (назовем ее исходной силой) две уравновешивающие друг друга силы, каждая из которых равна по модулю исходной силе. При этом механическое состояние тела не изменится. После этого мы можем отнять от тела уравновешенную систему сил, среди которых одна будет являться исходной силой, а вторая принадлежать введенной уравновешенной системе двух сил. При этом, опять же, механическое состояние тела не изменится, несмотря на то, что сила, оставшаяся на линии действия исходной силы, будет приложена уже к другой точке.

Прикладывая таким образом произвольное количество уравновешенных сил вдоль линии действия исходной силы, убедимся, что исходную силу можно перемещать в любую точку на линии ее действия, и механическое состояние тела при этом не изменится.

Следует отметить, что перенос силы вдоль линии ее действия можно осуществлять лишь в том случае, если тело рассматривается, как абсолютно твердое.

Две различные системы сил называют *эквивалентными*, если одну из них можно заменить другой, не нарушая механического состояния свободного твердого тела. Опять же - если рассматриваемое тело не является абсолютно твердым, то эквивалентные системы сил могут вызывать различную деформацию этого тела, что необходимо учитывать при расчетах.

Сила, эквивалентная данной системе сил, называется *равнодействующей*, а силы этой системы - составляющими этой равнодействующей.

Сила, которая уравнивает данную систему сил, называется *уравновешивающей* для этой системы.

Очевидно, что равнодействующая и уравновешивающая силы одной и той же системы равны по модулю и направлены в противоположные стороны вдоль одной прямой. Равнодействующая уравновешенной системы сил равна нулю, иначе говоря - уравновешенная система сил эквивалентна нулю.

Аксиома V (аксиома параллелограмма): равнодействующая двух сил, приложенных к телу в одной точке, равна по модулю и совпадает по направлению с диагональю параллелограмма, построенного на данных силах, и приложена в той же точке.

Построение диагонали параллелограмма, сторонами которого являются заданные векторы, называется *векторным* или *геометрическим сложением*. Таким образом, можно сказать, что равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке, равна их векторной сумме и приложена в той же точке. Равнодействующую двух сил можно найти, построив вместо параллелограмма сил треугольник сил, при этом порядок сложения векторов на величину равнодействующей не влияет.

Модуль и направление равнодействующей двух сил можно найти и *аналитическим способом*, применив к треугольнику сил теоремы косинусов и синусов.

Можно рассмотреть частные случаи сложения двух сил, если угол между их векторами равен φ :

♦ $\varphi = 0^\circ$, т. е. силы направлены вдоль одной прямой в одну сторону: равнодействующая этих сил будет равна их сумме.

♦ $\varphi = 180^\circ$, т. е. силы направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны: равнодействующая этих сил будет равна их разности.

♦ $\varphi = 90^\circ$, т. е. силы направлены под прямым углом друг к другу: равнодействующая может быть определена при помощи теоремы Пифагора.

Принцип отвердевания

Принцип отвердевания формулируется так: ***механическое состояние нетвердого тела не нарушится, если оно станет абсолютно твердым.***

Приведем примеры, поясняющие данную аксиому. Если жидкость в сосуде находится в состоянии равновесия, то оно не нарушится и после замерзания жидкости.

Еще один пример: гибкая нить, находящаяся в равновесии под действием двух растягивающих сил останется в равновесии, если нить станет абсолютно твердой.

Обратная формулировка принципа отвердевания в общем случае несправедлива, т. е. если твердое тело находится в равновесии, то, превратившись в нетвердое, оно может выйти из состояния равнове-

сия. Это означает, что условия равновесия твердого тела являются необходимыми, но не достаточными для равновесия нетвердого тела, и требуются дополнительные условия, учитывающие те или иные физические свойства тела или характер воспринимаемых телом нагрузок.

Так, например, при растяжении гибкой невесомой нити необходимо обеспечить условия равновесия двух сил, но нужно помнить, что нить может сопротивляться растяжению, но не может сопротивляться сжатию.

Распределенные нагрузки

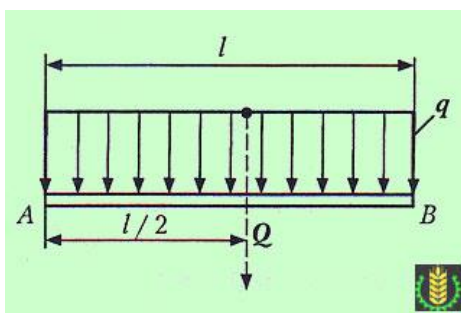
Как мы уже знаем, любая сила характеризуется тремя свойствами: модулем (скалярной размерностью), вектором (направлением в пространстве) и точкой приложения.

В действительности сила не может быть приложена к точке, поскольку точка - безразмерная, бесконечно малая единица пространства, поэтому фактически силы воздействуют на очень малую площадку, размерами которой пренебрегают. Такие силы (приложенные к ничтожно малой площадке тела) называют *сосредоточенными*.

В реальности часто встречаются силы, приложенные не к точке, а к объему или поверхности тела, например сила тяжести, давления ветра, воды и т. п., т. е. нагрузку воспринимает не бесконечно малая площадка, а значительная площадь или объем тела. Такие силы называют *распределенными*. Примером распределенной силы (обычно употребляют выражение "распределенная нагрузка") может послужить выпавший на крышу дома снег. Сила тяжести снежного покрова давит на всю поверхность крыши, нагружая одинаково каждую единицу ее площади, а не какую-либо точку.

Плоская система распределенных сил характеризуется ее интенсивностью, обычно обозначаемой латинской буквой q . Интенсивность есть сила, приходящаяся на единицу длины нагруженного участка. Интенсивность в системе единиц СИ выражается в ньютонах на метр (H/m).

Распределенная нагрузка, имеющая постоянную интенсивность по всей длине участка называется *равномерно распределенной* (см. рисунок).



При решении задач статики распределенную нагрузку заменяют ее равнодействующей. Модуль равнодействующей равномерно распределенной нагрузки равен $Q = ql$ (см. рисунок).

Равнодействующая Q прикладывается в середине отрезка AB .

Распределенная нагрузка, имеющая переменную интенсивность, называется *неравномерно распределенной*.

Примером такой нагрузки может служить меняющееся по высоте давление воды на плотину или снег, лежащий на крыше неровным слоем.

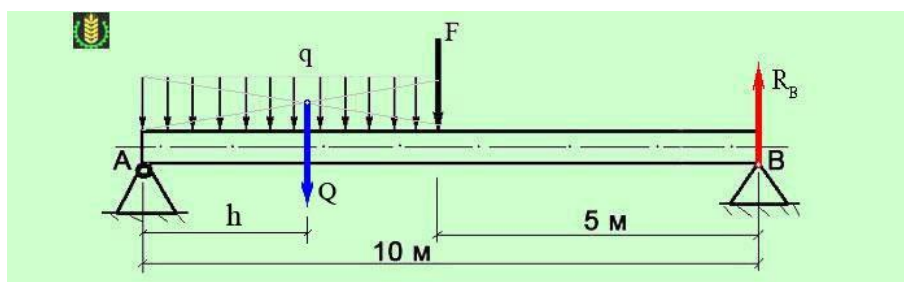
Определение точки приложения равнодействующей неравномерно распределенной нагрузки производится путем геометрических расчетов и построений.

Нагрузки, распределенные по поверхности (по площади), характеризуются давлением, т. е. силой, приходящейся на единицу площади. В системе единиц СИ давление выражается в паскалях ($Па$) или ньютонах на квадратный метр ($Н/м^2$).

Пример решения задачи с распределенной нагрузкой

Задача: Балка находится в равновесии под действием сосредоточенной силы $F = 100 Н$ и равномерно распределенной нагрузки $q = 60 Н/м$ (см. схему).

Необходимо определить реакцию R_B опоры B .



Решение. Поскольку по условию задачи необходимо определить реакцию опоры B , составим уравнение моментов сил относительно опоры A , учитывая, что равномерно распределенную нагрузку можно заменить сосредоточенной силой:

$Q = ql$, где $l = (10 - 5)$ метров - часть балки, к которой приложена распределенная нагрузка.

Точка приложения сосредоточенной силы Q расположена в середине той части балки, к которой приложена распределенная нагрузка; плечо этой силы относительно опоры A будет равно: $h = (10 - 5)/2 = 2,5$ м.

Составляем уравнение моментов сил относительно опоры A из условия, что балка находится в состоянии равновесия (уравнение равновесия).

Учитываем знаки:

- ◆ сила R_B создает относительно точки A положительный момент, плечо которого равно 10 м;
- ◆ сила F создает относительно точки A отрицательный момент, плечо которого равно 5 м;
- ◆ распределенная нагрузка q создает (посредством силы Q и плеча h) относительно точки A отрицательный момент.

Получаем уравнение равновесия балки, в котором лишь одна неизвестная величина (R_B):

$$\sum M = 10R_B - qlh - 5F = 10R_B - q(10-5)(10-5)/2 - 5F = 0,$$

откуда находим искомую реакцию опоры R_B :

$$R_B = \{q(10-5)(10-5)/2 + 5F\}/10 = 125 Н$$

Задача решена.

Плоская система сходящихся сил

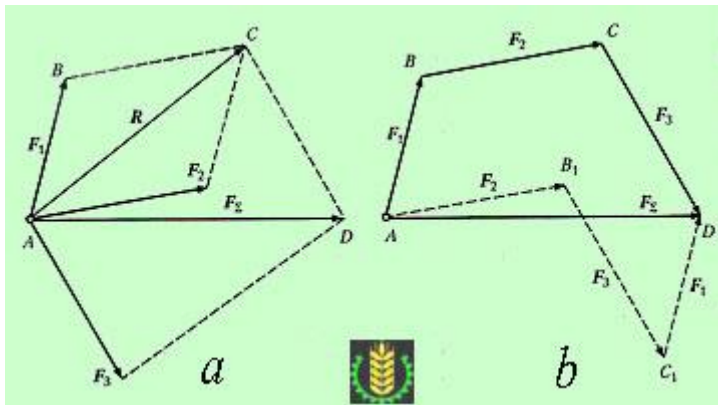
Геометрический способ определения равнодействующей плоской системы сходящихся сил

Система сил, линии действия которых лежат в одной плоскости и все пересекаются в одной точке, называется *плоской системой сходящихся сил*.

Теорема

Плоская система сходящихся сил в общем случае эквивалентна равнодействующей, которая равна векторной сумме этих сил; линия действия равнодействующей проходит через точку пересечения линий действия составляющих.

Пусть дана плоская система трех сил F_1, F_2 и F_3 , линии действия которых сходятся в точке A (см. рисунок *a*).



На основании следствия из аксиом *III* и *IV* перенесем эти силы вдоль линий их действия в точку A . Сложив первые две силы F_1 и F_2 по правилу параллелограмма, получим их равнодействующую R (см. рисунок *a*): $R = F_1 + F_2$.

Пользуясь той же аксиомой параллелограмма, сложим равнодействующую R с силой F_3 :

$$F_{\Sigma} = R + F_3 = F_1 + F_2 + F_3,$$

где F_{Σ} – равнодействующая данной системы трех сил.

Аналогичные рассуждения можно провести для любого количества сходящихся сил, в результате чего получим:

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n.$$

Сокращенно это равенство можно записать так:

$$F_{\Sigma} = \sum F_i, \quad \text{где } i - \text{ все целые числа от единицы до } n.$$

Очевидно, что построения, выполненные на *рисунке а*, можно заменить более простым, как показано на *рисунке b*. Многоугольник *ABCD* называют **силовым многоугольником**. Сторона *AD*, соединяющая начало первого с концом последнего вектора, называется *замыкающей стороной*.

Необходимо помнить, что стрелки векторов слагаемых сил образуют определенное направление обхода по контуру силового многоугольника, а замыкающая сторона, определяющая модуль и направление равнодействующей, имеет стрелку, направленную против обхода (*см. рисунок b*).

Если определить равнодействующую из силового многоугольника с помощью геометрии и тригонометрии, то такой способ будет называться **геометрическим**.

Если сделать чертеж силового многоугольника в определенном масштабе, то равнодействующая определится простым измерением замыкающей стороны с последующим умножением на масштаб. Такой способ нахождения равнодействующей называется **графическим**.

Порядок сложения векторов при построении силового многоугольника на величину равнодействующей не влияет, так как векторная сумма от перемены мест слагаемых не меняется.

Аналитический способ определения равнодействующей плоской системы сил

Пусть дана плоская система сходящихся сил $F_1, F_2, F_3, F_4 \dots F_n$. Равнодействующая этой системы $F_\Sigma = \Sigma F_i$.

В плоскости действия данной системы сил выберем ось координат и спроецируем данные силы и их равнодействующую на эту ось. Из математики известно свойство проекции векторной суммы, на основании которого можно утверждать, что проекция равнодействующей на ось равна алгебраической сумме проекций составляющих сил на ту же ось, т. е. $F_\Sigma x = \Sigma F_i x$. Правую часть этого равенства можно представить упрощенно: $F_\Sigma x = \Sigma X$.

Для того чтобы определить равнодействующую любой плоской системы сходящихся сил, спроецируем их на оси координат x и y , алгебраически сложим проекции всех сил и найдем таким образом проекции равнодействующей:

$$F_\Sigma x = \Sigma X; \quad F_\Sigma y = \Sigma Y.$$

Зная проекции, определим модуль и направление равнодействующей:

Модуль равнодействующей:

$$F_\Sigma = \sqrt{(F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2)} \quad (\text{здесь и далее } \sqrt{\quad} - \text{знак корня});$$

Направляющий тангенс угла между вектором F_Σ и осью x :

$$\text{tg}(F_\Sigma, x) = F_{\Sigma y} / F_{\Sigma x}.$$

Линия действия равнодействующей проходит через точку пересечения линий действия составляющих сил.

Аналитические условия равновесия плоской системы сходящихся сил

Если данная плоская система сходящихся сил находится в равновесии, то равнодействующая такой системы, а значит и проекции равнодействующей на оси координат равны нулю. Математически это выражение можно записать так:

$$F\Sigma = 0; F_x = 0; F_y = 0.$$

Учитывая, что $F\Sigma_x = \Sigma X$; $F\Sigma_y = \Sigma Y$, получаем равенства, выражающие аналитические условия равновесия плоской системы сходящихся сил:

$$\Sigma X = 0; \Sigma Y = 0.$$

Формулируется это условие следующим образом: ***для равновесия плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций этих сил на каждую из двух координатных осей равнялась нулю.***

С помощью уравнений равновесия можно определить два неизвестных элемента данной системы сил, например, модуль и направление одной силы или модули двух сил, направления которых известны и т. п.

Выведенные условия равновесия справедливы для любой системы координат, но для упрощения расчетов рекомендуется оси координат по возможности выбирать перпендикулярными неизвестным силам, чтобы каждое уравнение равновесия содержало одно неизвестное.

Когда направление искомой силы неизвестно, ее можно разложить на две составляющие по заданным направлениям, обычно по направлениям координатных осей; по найденным двум составляющим легко определяется неизвестная сила.

Если при решении задач аналитическим способом искомая реакция получается отрицательной, то это означает, что действительное ее направление противоположно направлению, принятому при расчетах.

Плоская система параллельных сил

Сложение двух параллельных сил, направленных в одну сторону
Система сил, линии действия которых лежат в одной плоскости и не пересекаются, называются системой параллельных сил.

При этом силы, линии действия которых параллельны, но векторы направлены в противоположные стороны, называют ***антипараллельными***.

Из физики известно, что *две параллельные силы, направленные в одну сторону, эквивалентны равнодействующей, которая равна сумме этих сил, параллельна им и направлена в ту же сторону; линия действия равнодействующей делит отрезок, соединяющий точки приложения данных сил на части, обратно пропорциональные модулям этих сил:*

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2; \quad F_1/F_2 = BC/AC.$$

Применяя производную пропорцию, можно записать:

$$F_1/BC = F_2/AC = (F_1 + F_2)/(BC + AC)$$

тогда:

$$F_1/BC = F_2/AC = F_{\Sigma}/AB.$$

Разложение данной силы на две параллельные составляющие производится с помощью формул сложения двух параллельных сил.

Разложение силы на две параллельные составляющие есть задача неопределенная, имеющая бесчисленное множество решений. Для того чтобы задача имела определенное решение, необходимо иметь два дополнительных условия, например, модуль одной составляющей и длину одного плеча, длины двух плеч и т. п.

Сложение двух неравных антипараллельных сил

Рассмотрим случай сложения двух не равных по модулю антипараллельных сил (*случай, когда такие силы равны по модулю особый, мы его рассмотрим на следующей странице*).

Теорема

Две неравные антипараллельные силы эквивалентны равнодействующей, которая равна разности данных сил, параллельна им и направлена в сторону большей силы; линия действия равнодействующей делит отрезок, соединяющий точки приложения сил на части, обратно пропорциональные величине этих сил.

Рассмотрим две антипараллельные силы F_1 и F_2 , причем $F_1 > F_2$. Разложим силу F_1 на две параллельные составляющие F_{Σ} и F_2' так, чтобы составляющая F_2' была приложена в точке B и равнялась по модулю силе F_2 . Тогда на основании теоремы о сложении двух параллельных сил, направленных в одну сторону, получим:

$$F_1 = F_{\Sigma} + F_2'; \quad F_1/BC = F_2'/AC = F_{\Sigma}/AB,$$

Из этих равенств найдем модуль составляющей F_{Σ} и расстояние AC до точки ее приложения

(известно, что $F_2' = F_2$). Данная система сил (F_1 и F_2) заменена системой трех сил:

$$(F_1, F_2) \equiv (F_\Sigma, F_2', F_2).$$

Отбросив на основании аксиомы IV две взаимно уравновешивающие силы F_2 и F_2' , получим, что данная система эквивалентна одной силе, т. е. равнодействующей F_Σ . Модуль и точка приложения равнодействующей определяются по формулам:

$$F_\Sigma = F_1 - F_2; \quad AC = (F_2/F_\Sigma)AB.$$

На основании можно сделать вывод, что равнодействующая двух параллельных сил равна их алгебраической сумме.

Если на тело действует n параллельных сил, то производя последовательное сложение сначала двух сил, затем их равнодействующей с третьей силой и т. д., найдем модуль и линию действия равнодействующей всей системы параллельных сил.

Очевидно, что равнодействующая системы параллельных сил определится в результате, как алгебраическая сумма всех сил данной системы.

Таким образом, **равнодействующая системы параллельных сил равна их алгебраической сумме:**

$$F_\Sigma = \Sigma F_i$$

Момент силы

Говорят, что когда-то великий Архимед изрек фразу: "Дайте мне точку опоры, и я переверну Землю". Современная физика утверждает, что с практической точки зрения, мудрый грек, конечно же, погорячился – даже сдвинуть на доли миллиметра такой массив, как планета с помощью мускульной силы человека – занятие не одного года, а уж перевернуть Землю... Тем не менее, с теоретической точки зрения Архимед прав – если найти соответствующую точку опоры, то с помощью рычага Землю сдвинуть с места может даже комар. Дело в том, что здесь играет роль не сила, как таковая, а ее момент.

Что же такое – момент силы? Следует сразу оговориться, что момент силы - понятие относительное, поскольку без указания того, относительно какой точки он рассматривается, понятие момента силы теряет смысл (*не путать с моментом пары сил, о котором речь пойдет в следующих статьях*).

Рассмотрим гайку, которую затягивают гаечным ключом определенной длины, прикладывая к концу ключа мускульное усилие. Если взять более длинный ключ, то гайку можно завернуть значительно сильнее, прикладывая одинаковое усилие. Из этого следует, что одной и той же силой можно выполнить различное по эффективности вращающее действие на какое-либо тело. В этом и кроется понятие момента силы – это вращающее действие силы относительно какой-либо точки в пространстве.

Понятие момента силы относительно точки ввел гениальный итальянец Леонардо да Винчи (1452-1519), который известен потомкам не только, как великий художник, но и видный ученый своего времени.

Итак, по определению, **момент силы относительно точки – это произведение модуля силы на ее плечо.**

Плечом в данном случае называется кратчайшее расстояние от рассматриваемой точки до линии действия силы, т. е. перпендикуляр, опущенный из точки на линию действия силы (*см. рисунок **b***).

Математически это определение можно представить в виде формулы:

$$M_0(\mathbf{F}) = \mathbf{F}h, \quad \text{где } h \text{ – плечо силы относительно точки } O.$$

Точка, относительно которой рассматривается момент силы, называется **центром момента**. Из приведенной выше формулы очевидно, что единицей измерения момента силы является ньютон × метр (Нм).

Теперь можно оценить справедливость высказывания Архимеда относительно возможности перевернуть Землю - при определенном плече силы, которую способны развить человеческие мускулы, это сделать теоретически возможно, но рука Архимеда должна была описать путь длиной в сотни тысяч километров для того, чтобы сдвинуть земной шар на доли миллиметра, поскольку потребовался бы огромной длины рычаг. Как вы понимаете, практически осуществить подобный подвиг нереально даже для такого уважаемого гения, как Архимед.

Впрочем, бытующее утверждение о трудностях, связанных с перемещением Земли человеческой рукой не совсем безгрешны. Ведь мы, как обыватели, привыкли рассматривать Землю, как весомый предмет, забывая что она, будучи в космическом пространстве, обладает совсем другими весовыми категориями. Поэтому справедливее будет рассматривать не расстояние, на которое мог бы сдвинуть земной шар Архимед, а ускорение, с которым он попытался бы сдвинуть планету со своего места, т. е. фактически - побороть силу инерции Земли, как тела. И тогда ему не потребовался бы рычаг непомерной длины - прикладывая незначительную силу, сдвинуть Землю можно было бы и двухметровой палкой, но здесь уже возник бы вопрос о времени, в течении которого необходимо было бы давить на рычаг, чтобы побороть инертность земного шара (как вы понимаете, мускульная сила человека не способна придать планете существенного ускорения). Опять же, возникает еще одна проблема - Архимеду потребовался бы надежный упор для ног, способный противо-стоять возмущению Земли на нахальную попытку Архимеда сдвинуть ее с места, а где его найти в открытом космосе?...

Осталось разоб-раться со знаками для момента силы, ведь он, как и сила, является векторной величиной, т. е. характеризуется не только модулем, но и направлением своего вращающего действия. При расчетах в технической механике условно считают, что если момент силы стремиться вращать свое плечо вокруг центра момента против часовой стрелки, то он является положительным, если по часовой стрелке - отрицательным (см. рисунок а).

Одна и та же сила относительно разных точек может вызывать и положительный, и отрицательный момент (см. рисунок а).

Отдельный случай, когда рассматриваемая точка (центр момента) лежит на линии действия силы. Очевидно, что в этом случае момент силы относительно этой точки будет равен нулю, поскольку плечо отсутствует (расстояние от линии действия силы до точки равно нулю).

И еще одна важная деталь, которая следует из определения момента силы относительно точки:

если переносить силу вдоль линии ее действия, то момент силы относительно любой точки не изменится, поскольку не изменится и расстояние от этой точки до линии действия силы, т. е. плечо (см. рисунок с).

Плоская система пар сил

Пара сил и момент пары

Мы рассматривали сложение пары антипараллельных сил, не равных по модулю и пришли к выводу, что равнодействующая таких сил существует и ее величина равна алгебраической сумме сил; точка приложения равнодействующей пары антипараллельных сил находится в пропорциональной зависимости от соотношения между модулями сил пары.

Если пара антипараллельных сил состоит из одинаковых по модулю сил, то такая система сил называется **парой сил** или просто **парой**.

Понятие пары сил введено в механику в начале XIX века французским ученым **Л. Пуансо** (1777-1859), который разработал теорию пар.

Плоскость, в которой расположена пара, называется **плоскостью действия пары**. Расстояние между линиями действия сил, составляющих пару, называется **плечом пары**.

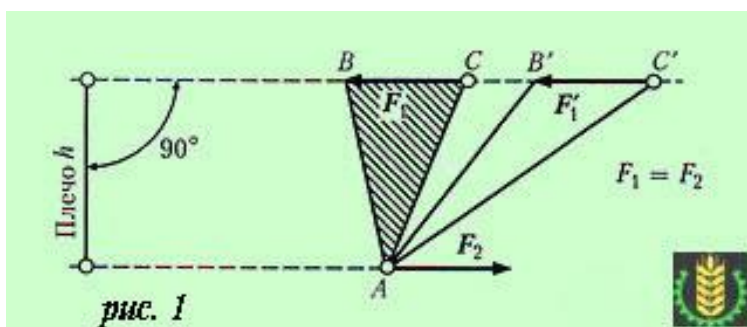
Эффект действия пары состоит в том, что она стремится вращать тело, к которому приложена. Ее вращающее действие определяется моментом пары.

Моментом пары называется произведение модуля одной из сил, составляющих пару, на плечо:

$$M(F_1, F_2) = F_1 h = F_2 h = m .$$

Момент пары и момент силы имеют одинаковую размерность - ньютон*метр (Нм).

Правило знаков для моментов пары.



Условимся считать момент пары положительным, если она стремится вращать свое плечо против часовой стрелки, и наоборот.

Если сделать геометрические построения (см. рисунок 1), то можно сделать вывод, что момент пары численно равен удвоенной площади тре-

угольника, у которого основанием является вектор одной из сил пары, а высотой – плечо пары (как известно, площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту).

Очевидно, что перенос любой из сил пары вдоль линии ее действия не влияет на вращающее действие всей пары, т. е. не изменяет момент пары, поскольку и основание треугольника (модуль силы) и его высота (плечо пары) в этом случае не меняются (перенос сил, составляющих пару вдоль линий их действия приводит к образованию равновеликих треугольников).

Основные свойства пары сил

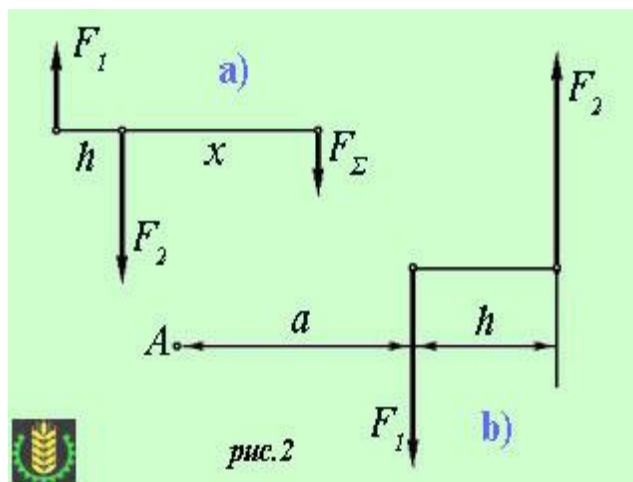
Основные свойства пары сил характеризуются следующими тремя теоремами.

Теорема 1: Пара сил не имеет равнодействующей.

Дана пара сил (F_1, F_2) с плечом h . (см. рисунок 2а). Ранее мы доказали, что равнодействующая пары антипараллельных сил может быть определена, как алгебраическая сумма сил, составляющих такую пару, т. е., с учетом направленности векторов сил в разные стороны: $F_{\Sigma} = |F_1| - |F_2|$. Применим

это утверждение к случаю, когда силы равны между собой по модулю, и получим, что равнодействующая будет равна нулю: $F_1 - F_2 = 0$. Из этого следует, что пара силы не имеет равнодействующей (или равнодействующая пары равна нулю).

Теорема II. Алгебраическая сумма моментов сил, составляющих пару, относительно любой точки плоскости действия пары есть величина постоянная, равная моменту пары.



Дана пара сил (F_1, F_2) с плечом h . (см. рисунок 2б). Момент пары: $m = F_1 h = F_2 h$.

Выберем в плоскости действия пары произвольную точку A и примем ее за центр моментов:

$$M_A(F_1) = -F_1 a; \quad M_A(F_2) = F_2(a+h).$$

Сложим правые и левые части этих равенств (не забываем, что $|F_1| = |F_2|$):

$$M_A(F_1) + M_A(F_2) = -F_1 a + F_2(a+h) = -F_1 a + F_2 a + F_2 h = F_2 h = m.$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что *при любом центре моментов пара сил войдет в уравнение моментов с одним и тем же знаком и одной и той же величиной.*

Теорема III. Алгебраическая сумма проекций сил пары на любую ось всегда равна нулю

Дана пара сил (F_1, F_2) и ось z , лежащая в плоскости действия пары (см. рисунок 3).

Из равенства заштрихованных треугольников видно, что $F_1z = F_2z$,

при этом проекция одной из сил положительная, проекция другой силы – отрицательная, следовательно, сумма этих проекций равна нулю.

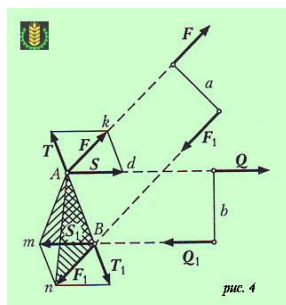
Теорема доказана.

Из теорем I и III следует, что пара сил не может входить ни в уравнение сил, ни в уравнение проекций сил, поскольку ее нельзя заменить ни равнодействующей, ни проекцией силы.

Эквивалентные пары

Две пары называют *эквивалентными*, если одну из них можно заменить другой, не нарушая механического состояния свободного твердого тела.

Теорема об эквивалентных парах формулируется так: если моменты двух пар алгебраически равны, то эти пары эквивалентны.



Пусть даны две пары (F_1, F_2) и (Q_1, Q_2), моменты которых алгебраически равны (см. рисунок 4), т. е.:

$$M(F_1, F_2) = M(Q_1, Q_2), \quad \text{или} \quad Fa = Qh.$$

Продолжим линии действия сил пары до их взаимного пересечения в точках A и B . На основании следствия из III и IV аксиом статики перенесем силы F и F_1 вдоль линий их действия в точки A и B . Соединим эти точки прямой линией и разложим силы F и F_1 по направлению AB и вдоль линий действия сил Q и Q_1 . Из равенства треугольников Akd и Bmn вытекает, что $T = T_1$ и $S = S_1$.

Силы T и T_1 представляют собой уравновешенную систему, так как они равны по модулю и действуют по одной прямой в противоположные стороны. На основании аксиомы IV такую систему можно отбросить.

Силы S и S_1 представляют собой пару сил с плечом b . Таким образом, пара $(F_1, F_2) \equiv$ паре (S_1, S_2) .

Рассмотрим треугольники AmB и AnB . Они имеют общее основание AB , и высоты их равны, следовательно, площади тоже будут равны. Поскольку площадь треугольника AnB равна половине момента пары (F_1, F_2) , а площадь треугольника AmB равна половине момента пары (S_1, S_2) , то можно записать:

$$M(F, F_1) = M(S, S_1) \quad \text{или} \quad Fa = Sb.$$

По условиям теоремы $Fa = Qb$, следовательно $Sb = Qb$, отсюда $S = Q, S_1 = Q_1$.

Силы S и Q равны по модулю, действуют вдоль одной прямой в одном направлении, следовательно они эквивалентны друг другу; на этом же основании можно сделать вывод об эквивалентности сил S_1 и Q_1 . Очевидно, что тогда пара $(Q, Q_1) \equiv$ паре (S, S_1) .

Так как две пары порознь эквивалентны одной и той же третьей паре, то эти пары тоже будут эквивалентны между собой:

$$M(F, F_1) = M(Q, Q_1), \quad \text{что и требовалось доказать.}$$

Из доказательства теоремы об эквивалентных парах вытекает четыре следствия:

- ♦ не изменяя механического состояния тела, пару можно переносить как угодно в плоскости ее действия;
- ♦ не изменяя механического состояния тела, можно менять силы и плечо пары, но так, чтобы ее момент оставался неизменным;
- ♦ чтобы задать пару, достаточно задать ее момент, поэтому иногда слово "пара" заменяют словом "момент";
- ♦ условия равновесия плоской системы параллельных сил будут справедливы, если вместе с такой системой действуют и пары сил, так как их можно повернуть в плоскости действия и поставить силы пары параллельно другим силам системы.

Теорема о сложении пар

Теорема: *Всякая плоская система пар эквивалентна одной результирующей паре, момент которой равен алгебраической сумме моментов данных пар.*

Пусть даны три пары с моментами m_1, m_2 и m_3 , действующие в одной плоскости (рис. 1а).



На основании следствия из теоремы об эквивалентных парах преобразуем эти пары так, чтобы их плечи стали равными d , и перенесем к произвольно взятому на плоскости отрезку AB длиной d .

Тогда вместо заданной системы пар получим новую систему, эквивалентную данной, причем моменты данных и новых пар будут равны, т. е.

$$m_1 = -P_1d; \quad m_2 = F_1d; \quad m_3 = -Qd.$$

Сложив три силы в точке A , получим равнодействующую R_1 , модуль которой $R_1 = P_1 + Q_1 - F_1$. Сложив три силы в точке B (рис. 4b), получим равнодействующую R_2 , модуль которой $R_2 = P_2 + Q_2 - F_2$, причем очевидно, что силы R_1 и R_2 равны по модулю, параллельны и противоположно направлены.

Значит, система (R_1, R_2) представляет собой пару с плечом d , эквивалентную данной системе пар. Момент этой результирующей пары:

$$m = -R_1d = -(P_1 + Q_1 - F_1)d = -P_1d - Q_1d + F_1d, \text{ или}$$

$$m = m_1 + m_2 + m_3.$$

Аналогичное доказательство можно привести для любой плоской системы пар, т. е. в общем виде можно записать:

$$m = \sum m_i, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Условие равновесия плоской системы пар

Применяя доказанную ранее теорему о сложении пар к плоской системе пар, находящихся в равновесии, запишем:

$$m = \sum m_i = 0.$$

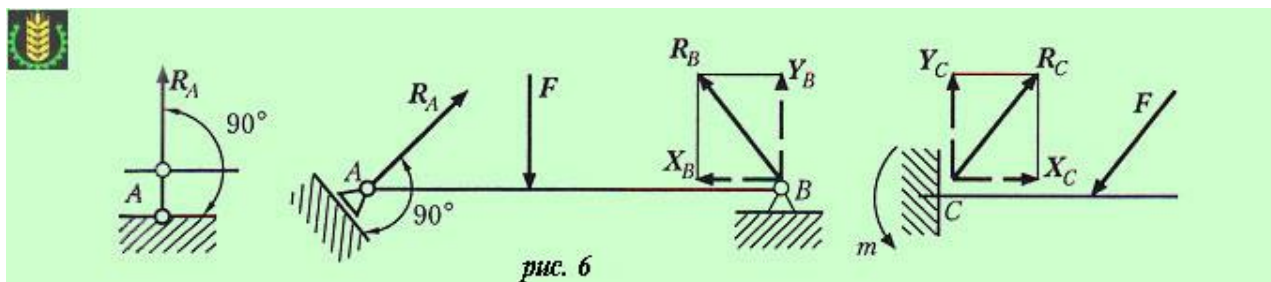
Следовательно, условие равновесия плоской системы пар в общем виде будет выглядеть так:

$$\sum m_i = 0,$$

а формулируется следующим образом: **для равновесия плоской системы пар необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов данных пар равнялась нулю.**

Опоры и опорные реакции балок

Опоры балок по их устройству могут быть разделены на три основных типа (см. рисунок 6): шарнирно-подвижная (опора A), шарнирно-неподвижная (опора B) и жесткая заделка (опора C). На приведенном рисунке показаны два способа условного изображения шарнирно-неподвижной опоры (опора A).



Применим правило для определения направления реакций связей и определим, какое направление могут иметь реакции представленных опор в зависимости от ограничений, накладываемых на балку.

Шарнирно-подвижная опора допускает поворот вокруг оси шарнира и линейное перемещение параллельно опорной плоскости. Если пренебречь трением на опоре и в шарнире, то реакция такой связи будет направлена перпендикулярно опорной плоскости, и неизвестна только по модулю (*одно неизвестное*).

Шарнирно-неподвижная опора допускает только поворот вокруг оси шарнира, и не допускает никаких линейных перемещений. Реакция такой опоры будет направлена перпендикулярно оси шарнира; модуль и направление ее заранее не известны (*два неизвестных*).

Жесткая заделка (защемление) не допускает ни линейных перемещений, ни поворотов заделанного конца балки. Жесткую заделку заменяют реактивной силой, неизвестной по модулю и направлению, и реактивным моментом (*три неизвестных*).

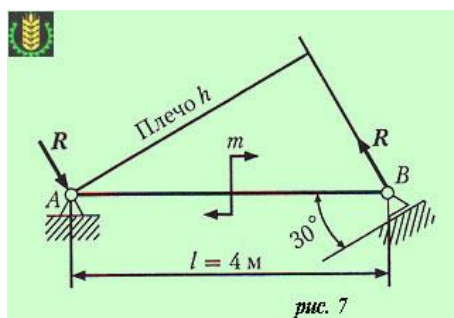
Реактивную силу, неизвестную по направлению, раскладывают на две взаимно-перпендикулярные составляющие. Если при решении задачи реактивная сила или реактивный момент получаются отрицательными, то их действительное направление противоположно принятому.

Кроме перечисленных выше трех основных типов опор балок в конструкциях нередко балка свободно опирается на плоскость (поверхность) или ребро призмы (угол). В этих случаях направление реакций определяют, как для аналогичных типов связей, рассмотренных [здесь](#).

Пример решения задачи по определению реакций опор балки

Пусть горизонтальная балка длиной $l = 4 \text{ м}$ закреплена на опорах, как показано на *рисунке 7*, и нагружена парой сил с моментом $m = 420 \text{ Нм}$.

Не учитывая силу тяжести балки, определим реакции R опор A и B .



Решение.

Отбросим опоры, заменив их реакциями, и рассмотрим равновесие балки.

Так как пару сил можно уравновесить только парой, то реакции R опор A и B должны образовывать пару сил, причем реакция шарнирно подвижной опоры B перпендикулярна опорной плоскости.

Применим условие равновесия плоской системы пар и составим уравнение равновесия:

$$\sum m_i = 0; -m + Rh = 0, \quad \text{где } h = l \cos 30^\circ.$$

Подставив известные значения, получим: $R = m/h = m/(l \cos 30^\circ) = 420/(4 \times 0,866) \approx 120 \text{ Н}$.

Задача решена.

Пример решения задачи по определению реакции в жесткой заделке

Пусть консольная балка длиной $l = 2$ м нагружена на свободном конце силой $F = 3000$ Н (рис. 8).

Не учитывая силу тяжести балки, определим реакцию заделки.

Решение

Отбросим заделку, заменив ее реакциями, и рассмотрим равновесие балки. Реакция заделки представляет собой реактивную силу R и реактивный момент m .

Так как реактивный момент m может быть уравновешен только парой сил, то нагрузка F и реакция R должны образовывать пару, следовательно:

$$R = F = 3000 \text{ Н.}$$

Далее применим условие равновесия плоской системы пар и составим уравнение равновесия: $\Sigma m_i = 0$; $m - Fl = 0$, откуда получим:

$$m = Fl = 3000 \times 2 = 6000 \text{ Нм.}$$

Задача решена.

Пространственная система сил

Пространственная система сходящихся сил

Система сил, линии действия которых расположены в различных плоскостях, называется **пространственной системой сил**.

Пространственная система сил называется **сходящейся**, если линии действия всех сил системы пересекаются в одной точке.

Теорема: *пространственная система сходящихся сил эквивалентна равнодействующей, которая равна векторной сумме этих сил; линия действия равнодействующей проходит через точку пересечения линий действия составляющих сил.*

Пусть дана пространственная система n сходящихся сил ($F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$). На основании следствия из **аксиом III и IV** перенесем все силы системы вдоль линий действия в точку их пересечения. Затем на основании аксиомы параллелограмма последовательно сложим все силы и получим их равнодействующую:

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n, \quad \text{или} \quad F_{\Sigma} = \Sigma F_i.$$

Силовой многоугольник пространственной системы сил не лежит в одной плоскости, поэтому геометрический и графический способы нахождения равнодействующей пространственной системы сходящихся сил неприемлемы, а применяется только аналитический способ (*метод проекций*).

Проекция силы на ось в пространстве находится по проецирующим перпендикулярам, и может быть определена при помощи тригонометрических функций. При определении проекций сил пространственной системы потребуется система координат с осями X, Y, Z , поскольку силы системы не располагаются в одной плоскости.

Правило знаков для проекций будет таким же, как и для плоской системы сил – совпадающие по направлению с координатной осью силы считаются положительными, в противном случае – отрицательными. Если вектор силы параллелен какой-либо оси координат, то он проецируется на эту ось в натуральную величину, если же вектор перпендикулярен оси, его проекция на эту ось будет равна нулю.

Разложение силы по трем осям координат

Пусть дана сила F



Возьмем систему координат так, чтобы начало координат совпало с началом вектора силы F (т. е. с точкой приложения силы). Из конца этого вектора опустим перпендикуляр на плоскость xy и разложим силу F на составляющие F_{xy} и F_z , а составляющую F_{xy} – на составляющие F_x и F_y . Тогда:

$$F = F_x + F_y + F_z.$$

Достроим полученное изображение до параллелепипеда, у которого составляющие F_x, F_y и F_z являются ребрами, а сила F – диагональю.

Из изложенного можно сделать вывод: **равнодействующая трех взаимно-перпендикулярных сил выражается по модулю и направлению диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах.**

Из рисунка видно, что в случаях разложения силы F по трем взаимно-перпендикулярным направлениям x, y, z составляющие F_x, F_y и F_z равны по модулю проекциям силы F на эти оси.

Зная проекции силы на три взаимно-перпендикулярные оси координат, можно определить модуль и направление вектора силы по формулам:

$$\text{модуль силы: } F = \sqrt{(F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)} \quad (\text{здесь и далее } \sqrt{\quad} - \text{знак корня});$$

направляющие косинусы:

$$\cos(F,x) = F_x/F; \quad \cos(F,y) = F_y/F; \quad \cos(F,z) = F_z/F.$$

Аналитический способ определения равнодействующей пространственной системы сходящихся сил

Рассмотренный выше способ разложения силы F на три составляющие по направлению координатных осей x, y, z можно применить для каждой из сходящихся сил пространственной системы. Тогда вместо данной системы n сходящихся сил мы получим эквивалентную ей систему $3n$ сил, из которых n сил действуют по оси x , n сил – по оси y , и n сил – по оси z .

Равнодействующая проекций сил системы на ось x равна их геометрической сумме, то же самое можно сказать и о равнодействующих проекций сил на оси y и z .

Таким образом, систему $3n$ сил можно заменить эквивалентной ей системой трех сил, каждая из которых представляет собой равнодействующую проекций сил данной системы на ту или иную ось координат.

Проекция силы на три взаимно-перпендикулярные оси и составляющие силы, направленные по этим осям, равны по модулю, следовательно, проекции равнодействующей равны:

$$F_{\Sigma x} = \Sigma X; \quad F_{\Sigma y} = \Sigma Y; \quad F_{\Sigma z} = \Sigma Z.$$

Очевидно, что равнодействующая трех взаимно перпендикулярных сил выражается по модулю и направлению диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах, и по известным проекциям равнодействующей можно определить модуль и направление самой равнодействующей.

Аналитические условия равновесия пространственной системы сходящихся сил

Известно, что пространственная система сходящихся сил эквивалентна равнодействующей. Если такая система сил находится в равновесии, т. е. эквивалентна нулю, то можно сделать вывод, что равнодействующая этой системы равна нулю, а, следовательно, и проекции равнодействующей тоже равны нулю, причем эти проекции равны сумме проекций составляющих.

Отсюда вытекают условия равновесия пространственной системы сходящихся сил:

$$\Sigma X = 0; \quad \Sigma Y = 0; \quad \Sigma Z = 0.$$

Эти условия формируются следующим образом: *для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил на каждую их трех координатных осей равнялась нулю.*

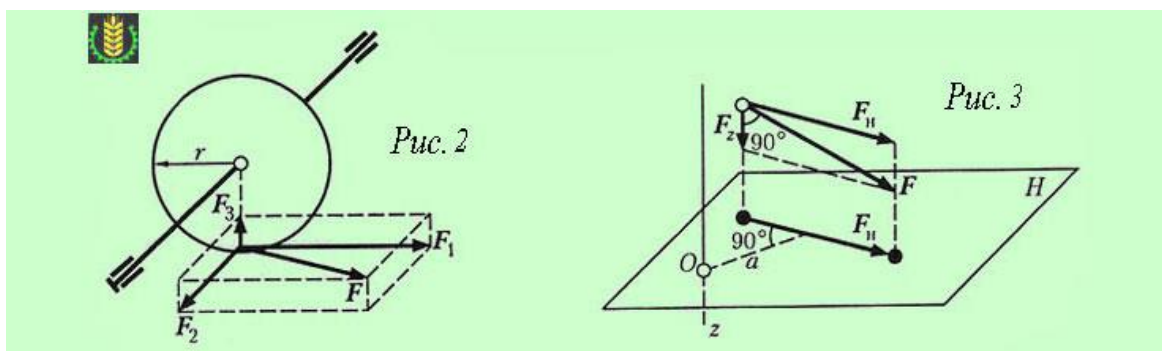
Момент силы относительно оси

Рассмотрим колесо червячной передачи, укрепленное на валу, вращающемся в подшипниках. Червяк передает червячному колесу силу F , не лежащую в плоскости, перпендикулярной оси.

Разложим силу F на три взаимно-перпендикулярные составляющие F_1, F_2 и F_3 .

Составляющую F_1 назовем *окружной силой*, составляющую F_2 – *осевой силой*, а составляющую F_3 – *радиальной силой*.

Из рисунка видно, что составляющая F_1 вызывает вращательное действие, которое измеряется произведением силы F_1 на радиус колеса r ; составляющая F_2 стремится сдвинуть червячное колесо вдоль оси, а составляющая F_3 стремится изогнуть ось колеса. Очевидно, что вращающее действие сил F_2 и F_3 относительно оси колеса равно нулю. Таким образом, если нужно найти момент силы относительно оси, то следует принимать в расчет только составляющую F_1 , лежащую в плоскости, перпендикулярной оси, и не пересекающую ось (иначе ее момент будет равен нулю).



Ранее было отмечено, что проекция вектора силы на ось есть скалярная алгебраическая величина. В отличие от проекции на ось проекция силы на плоскость есть величина векторная, так как эта проекция характеризуется не только числовым значением, но и положением на плоскости, т. е. направлением.

Поэтому моменту силы относительно оси можно дать такое определение: **моментом силы относительно оси называется величина, равная моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью.**

Это определение поясняет *рисунок 3*.

Момент силы относительно оси условимся записывать следующим образом:

$$M_z(F) = F_n a.$$

Условимся считать момент силы положительным, если смотреть с положительного конца оси и сила стремится вызвать вращение против часовой стрелки, если же сила стремится вызвать вращение по часовой стрелке, ее момент считаем отрицательным.

Момент силы относительно оси не меняется при перемещении силы вдоль оси ее действия.

Момент силы будет равен нулю в двух случаях (не считая случаев, когда сила равна нулю или направлена вдоль оси):

- ♦ если вектор силы параллелен оси, так как при этом проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси, равна нулю (см. *рисунок 3*, сила FZ);
- ♦ если линия действия силы пересекает ось, так как при этом плечо равно нулю (сила $F3$ на *рисунке 2*).

Аналитические условия равновесия пространственной системы произвольно расположенных сил

Пространственная система сил, в которой линии действия составляющих сил расположены произвольно, т. е. линии их действия могут не пересекаться и находиться в разных плоскостях, называется произвольно расположенной системой сил.

Для равновесия пространственной системы произвольно расположенных сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил на каждую из трех осей координат была равна нулю, и чтобы алгебраическая сумма моментов всех сил относительно каждой из этих осей была равна нулю.

Строгое обоснование приведенного выше условия равновесия пространственной системы произвольно расположенных сил требует знания некоторых вопросов, не предусмотренных программами учреждений среднего профессионального образования, поэтому условие равновесия такой системы здесь приводится без доказательства.

Математически условие равновесия пространственной системы произвольно расположенных сил можно записать в виде уравнений:

- $\Sigma X = 0; \quad \Sigma M_x(F_i) = 0;$
- $\Sigma Y = 0; \quad \Sigma M_y(F_i) = 0;$
- $\Sigma Z = 0; \quad \Sigma M_z(F_i) = 0.$

Свободное тело в пространстве имеет шесть степеней свободы, а именно: возможность перемещаться в направлениях трех взаимно-перпендикулярных осей координат и возможность вращаться вокруг этих осей. Таким образом, шести степеням свободы тела в пространстве соответствуют шесть условий равновесия. Если система сил, приложенных к свободному телу, удовлетворяет всем шести условиям равновесия, то возможность трех перемещений и трех вращений тела под действием сил системы исключена, поэтому тело будет находиться в равновесии.

Очевидно, что все выведенные ранее условия равновесия для различных систем сил являются частными случаями условия равновесия пространственной системы произвольно расположенных сил. Так как условия равновесия пространственной системы сил справедливы для любых прямоугольных осей координат, то при решении данной задачи систему координат можно изменять, т. е. часть уравнений равновесия составить для одних осей координат, а часть – для измененных. В некоторых случаях этот прием упрощает решение задач.

Теорема о моменте равнодействующей относительно оси
(теорема Вариньона)

Теорема: момент равнодействующей относительно оси равен алгебраической сумме моментов, составляющих сил относительно этой же оси.

Пусть даны пространственная система n произвольно расположенных сил, приложенных к телу, и равнодействующая этой системы сил F_{Σ} (см. рисунок 4):



$$(F_1, F_2, F_3, \dots, F_n) \equiv F_{\Sigma}$$

Приложим к телу другую систему сил, равнодействующая которой F'_{Σ} по модулю равна F_{Σ} и направлена по той же линии действия, но в противоположную сторону, т. е. является уравновешивающей данной системы сил. Тогда можно записать:

$$(F_1, F_2, F_3, \dots, F_n, F'_{\Sigma}) \equiv 0, \text{ или } (F_{\Sigma}, F'_{\Sigma}) \equiv 0.$$

Так как обе записанные выше системы сил эквивалентны нулю, т. е. уравновешены, то к ним можно применить любое условие равновесия, например

$$\Sigma M_x(F_i) = 0.$$

Запишем это условие для обеих систем:

$$M_x(F_1) = M_x(F_2) + M_x(F_3) + \dots + M_x(F_n) + M_x(F'_{\Sigma}) = 0;$$

$$M_{\Sigma}(F_{\Sigma}) + M_x(F'_{\Sigma}) = 0.$$

Так как правые части этих равенств равны, то будут равны и левые:

$$M_x(F_1) = M_x(F_2) + M_x(F_3) + \dots + M_x(F_n) + M_x(F'_{\Sigma}) = M_{\Sigma}(F_{\Sigma}) + M_x(F'_{\Sigma}).$$

Сократив общее слагаемое $M_x(F'_{\Sigma})$, получим:

$$M_x(F_1) = M_x(F_2) + M_x(F_3) + \dots + M_x(F_n) = M_{\Sigma}(F_{\Sigma}) \text{ или } \Sigma M_x(F_i) = M_{\Sigma}(F_{\Sigma}).$$

Теорема доказана.

Трение - основные понятия, законы и зависимости

Понятие трения

Как известно, в природе не существует абсолютно гладких и абсолютно твердых тел, поэтому при перемещении одного тела по поверхности другого возникает сопротивление, которое называется трением.



Трение – явление сопротивления относительно перемещению, возникающее между двумя телами в зонах соприкосновения поверхностей по касательной к ним.

Трение – явление чрезвычайно распространенное в природе и имеющее большое значение. При этом оно может выполнять и полезные, и вредные функции. На трении основана работа фрикционных и ременных передач, муфт, наклонных транспортеров, прокатных станов, тормозных устройств и т. п.

Трение обеспечивает сцепление тел с земной поверхностью и, следовательно, работу машин, тракторов и другой транспортной самоходной техники. При отсутствии трения мы не могли бы ходить по земле, поскольку наши ноги скользили бы и разъезжались в разные стороны, как у неумелого конькобежца на гладком льду.

Наряду с полезными свойствами, трение является во многих устройствах и механизмах вредным сопротивлением, которое отнимает львиную долю мощности и энергии у машин. Для уменьшения трения в механизмах конструкторам приходится применять различные приемы и способы, чтобы снизить непродуктивные потери энергии.

Трение классифицируют по характеру движения, в результате которого оно возникает. Различают *трение покоя, трение скольжения, трение качения и трение качения с проскальзыванием*. Очевидно, что последний из перечисленных видов трения является комбинацией трения скольжения и трения качения.

Трением покоя называется трение двух тел при начальном (бесконечно малом) относительном перемещении в момент перехода от состояния покоя к состоянию относительного движения. Это явление можно объяснить шероховатостью поверхностей соприкасающихся тел, а также их деформацией, вызванной взаимным давлением друг на друга.

Кроме того, при таком взаимном давлении (контакте) между телами, на их поверхностях возникают силы молекулярного сцепления. Для того, чтобы начать взаимное перемещение тел, необходимо преодолеть все эти факторы, обуславливающие трение покоя.

Трением движения называется трение двух тел, находящихся в относительном движении. Рассмотрим основные виды трения в зависимости от характера относительного движения тел.

Трение скольжения

Трением скольжения называется трение движения, при котором скорости тел в точке касания различны по значению и (или) направлению.



Трение скольжения, как и трение покоя, обусловлено, прежде всего, шероховатостью и деформацией поверхностей, а также наличием молекулярного сцепления прижатых друг к другу тел. Трение скольжения сопровождается изнашиванием, т. е. отделением или остаточной деформацией материала, а также нагревом трущихся поверхностей тел (остаточной называется деформация, не исчезающая после прекращения действия внешних сил).

Трение характеризуется силой трения.

Сила трения есть сила сопротивления относительному перемещению двух тел при трении.

Рассмотрим тело, лежащее на горизонтальной шероховатой плоскости (см. рисунок 1).

Сила тяжести G уравновешивается нормальной реакцией плоской поверхности N . Если к телу

приложить небольшую движущую силу P , то оно не придет в движение, так как эта сила будет уравновешиваться силой трения $F_{тр}$, которая является, таким образом, составляющей реакции опорной плоскости, направленной вдоль плоскости в противоположную перемещению сторону.

Если постепенно увеличивать сдвигающую силу P , то до определенного ее значения тело будет оставаться в покое, а затем придет в движение.

Очевидно, что сила трения в состоянии покоя может изменяться в зависимости от степени микросмещения может изменяться от нуля до какого-то максимального значения $F_{тр}^{max}$, причем в промежутке между нулем и максимальным значением сила трения $F_{тр}$ по модулю всегда равна сдвигающей силе P .

Максимальное значение сила трения покоя имеет в момент начала относительного движения. Это значение называется наибольшей силой трения покоя или просто силой трения покоя.

Сила трения всегда направлена в сторону, противоположную направлению относительного движения тела.

В XVIII веке французские ученые *Гийом Амонтон* (1663-1705), а затем *Шарль Огюстен Кулон* (1736-1806) провели фундаментальные исследования в области трения, и на основе их сформулировали три основных закона трения скольжения, которые обычно называют законами Кулона.

1-й закон Кулона


Сила трения не зависит от величины площади трущихся поверхностей.

Первый закон можно объяснить с помощью следующих умозаключений. Если площадь трущихся поверхностей увеличится, то увеличится и количество сцепляющихся неровностей, но уменьшится давление на опорную поверхность, которое обратно пропорционально площади контакта тел. Поэтому сопротивление относительному перемещению останется прежним.

2-й закон Кулона

Максимальная сила трения прямо пропорциональна нормальной составляющей внешних сил, действующих на поверхности тела.

Второй закон Кулона говорит о том, что если увеличится нормальная составляющая внешних сил, действующих на поверхности тела (иначе говоря, увеличится сила нормального давления или реакции), то во столько же раз возрастет максимальная сила трения.



Поскольку зависимость эта прямо пропорциональная, можно выделить коэффициент, характеризующий ее пропорциональность. Этот коэффициент называется **коэффициентом трения скольжения**, и определяется он, как отношение силы трения $F_{тр}$ к нормальной составляющей N внешних сил, действующих на поверхности тела. Обозначается коэффициент трения скольжения f .

При наибольшей силе трения покоя коэффициент трения называют *коэффициентом сцепления*.

Таким образом,

$$f = F_{mp}/N \quad \text{или} \quad F_{mp} = fN.$$

В результате второй закон трения скольжения можно сформулировать так: *сила трения равна коэффициенту трения скольжения, умноженному на силу нормального давления или реакции*.

Очевидно, что коэффициент трения скольжения – величина безразмерная.

Нормальная реакция N опорной поверхности и сила трения F_{mp} дают равнодействующую R , которая называется полной реакцией опорной поверхности (см. рисунок 2).

$$R = N + F_{mp}.$$

Полная реакция R составляет с нормалью к опорной поверхности некоторый угол. Максимальное значение этого угла (достигает в момент начала относительного движения) называется *углом трения* и обозначается φ . Из рисунка 2 очевидно, что

$$f = \operatorname{tg}\varphi,$$

т. е. коэффициент трения скольжения равен тангенсу угла трения.

Если коэффициент трения скольжения одинаков для всех направлений движения, то множество (геометрическое место) полных реакций образует круговой конус, который называется *конусом трения* (см. рисунок 2).

Если для разных направлений движения коэффициент трения неодинаков (например, при скольжении по дереву вдоль волокон и поперек волокон), то конус трения будет некруговым (несимметричным).

Свойство конуса трения заключается в том, что для равновесия тела, лежащего на шероховатой поверхности, равнодействующая приложенных к нему активных сил должна проходить внутри конуса трения.

Действительно, если равнодействующую P активных сил, приложенных к телу, разложить на составляющие P_1 (движущая сила) и P_2 (сила нормального давления), то

$$P_1 = P_2 \operatorname{tg}\alpha.$$

По второму закону трения скольжения

$$F_{mp} = fP_2 = P_2 \operatorname{tg}\varphi.$$

Следовательно, при $\alpha < \varphi$ будет $P_1 < F_{mp}$ и движение окажется невозможным.

3-й закон Кулона

Сила трения зависит от материала тел, состояния трущихся поверхностей и рода смазки.

Согласно третьему закону трения скольжения, коэффициент трения скольжения зависит от материалов трущихся тел, качества обработки их поверхности (степени шероховатости), рода и температуры смазки. В зависимости от наличия между сопрягаемыми поверхностями слоя смазки трение подразделяется на два вида: трение без смазочного материала (сухое трение) и трение в условиях смазки.

Коэффициент трения скольжения определяют опытным путем; значения его для различных условий приведены в справочниках. Примеры коэффициентов трения для некоторых материалов приведены ниже.

- Металл по металлу без смазки 0,15...0,30
- То же, со смазкой0,10...0,18
- Дерево по дереву без смазки 0,40...0,60
- Кожа по чугуну без смазки 0,30...0,50
- То же, со смазкой 0,15
- Сталь по льду 0,02

Коэффициент трения скольжения при движении обычно меньше, чем при покое, и в первом приближении не зависит от скорости относительного перемещения тел.

Методы решения задач статики при наличии трения остаются такими же, как и при отсутствии его, причем в уравнения равновесия обычно вводят максимальные значения сил трения.

Трение на наклонной поверхности



Рассмотрим тело, лежащее на шероховатой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтальной плоскостью (см. рисунок 3).

Разложим силу тяжести тела G на составляющие G_1 и G_2 , параллельную и перпендикулярную наклонной плоскости. Модули этих составляющих определим, используя тригонометрические зависимости:

$$G_1 = G \sin \alpha; \quad G_2 = G \cos \alpha.$$

Составляющая G_1 стремится сдвинуть тело вдоль наклонной плоскости. Полностью или частично эта составляющая уравновешивается силой трения; согласно второму закону трения скольжения, ее максимальное значение равно:

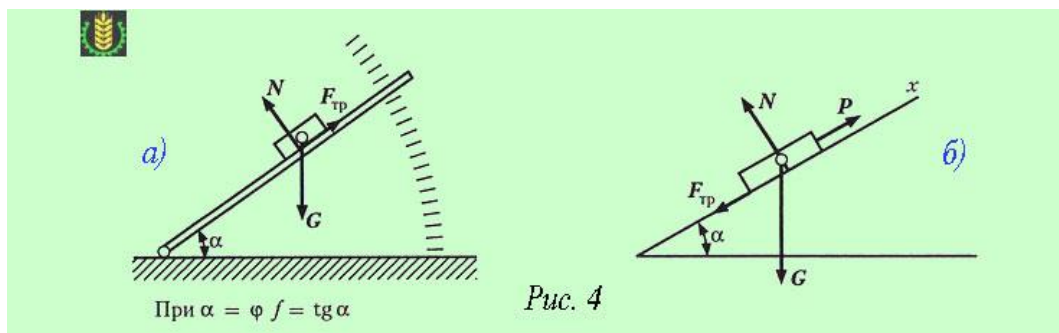
$$F_{mp} = fN = fG \cos \alpha, \quad \text{где } f \text{ – коэффициент трения скольжения тела по наклонной плоскости.}$$

Для того, чтобы тело, лежащее на наклонной плоскости, находилось в равновесии, движущая сила G_1 должна быть по модулю равна силе трения F_{mp} , т. е.

$$G \sin \alpha = fG \cos \alpha \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \alpha = f = \operatorname{tg} \varphi, \quad \text{откуда следует, что } \alpha = \varphi.$$

Если угол, который наклонная плоскость составляет с горизонтом, будет равен углу трения, то тело, лежащее на наклонной плоскости, будет под действием собственной силы тяжести либо равномерно скользить вниз, либо находиться в состоянии покоя (что, собственно, одно и то же).

Для того, чтобы тело, лежащее на наклонной плоскости, заведомо не скользило вниз под действием собственной силы тяжести, должно быть соблюдено условие $\alpha < \varphi$.



Наклонной плоскостью с переменным углом наклона к горизонту пользуются для экспериментального определения угла трения φ и коэффициента трения f (см. рисунок 4а).

Определим модуль силы P , параллельной наклонной плоскости, в случае равномерного перемещения тела вверх по шероховатой наклонной плоскости (см. рисунок 4б). Спроецируем силы, действующие на тело, на ось x . Составим уравнение равновесия:

$$\Sigma X = 0; \quad P - G \sin \alpha - F_{mp} = 0.$$

Так как $F_{mp} = fG \cos \alpha$, то $P = G \sin \alpha + fG \cos \alpha$ или после преобразований: $P = G (\operatorname{tg} \alpha + f)$.

Определим модуль горизонтальной силы P , которую надо приложить к телу для равномерного перемещения его вверх по шероховатой наклонной плоскости (см. рисунок 5).

Применим геометрическое условие равновесия плоской системы сил (размерами тела пренебрегаем) и построим замкнутый силовой многоугольник, соответствующий уравнению равновесия:

$$G + P + N + F_{mp} = 0.$$

Из треугольника abc имеем: $P = G \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$.

Этот случай движения имеет место при взаимном перемещении винта и гайки с прямоугольной резьбой, так как резьбу винта можно рассматривать как наклонную плоскость, угол наклона которой равен углу подъема винтовой линии.

Трение в резьбе, имеющей треугольный или трапецеидальный профиль, подобно трению в клинчатом ползуне. Поэтому рассмотрим клинчатый ползун с углом заострения 2β , нагруженный вертикальной

силой Q (см. рисунок 6). Определим силу P , необходимую для равномерного перемещения ползуна вдоль горизонтальных направляющих, если коэффициент трения скольжения равен f .

Составим два уравнения равновесия ползуна:

$$\Sigma X = 0; \quad P - 2F_{mp} = 0;$$

$$\Sigma Y = 0; \quad 2N \sin \beta - Q = 0,$$

где F_{mp} – сила трения на каждой грани ползуна; N – нормальная реакция направляющей.

Решая эту систему уравнений и учитывая, что $F_{mp} = fN$, получим:

$$P = (f/\sin \beta) Q = f' Q,$$

где $f' = f/\sin \beta$ – приведенный коэффициент трения.

Соответствующий этому приведенному коэффициенту угол трения обозначим φ' и назовем **приведенным углом трения**, тогда:

$$f' = \operatorname{tg} \varphi'.$$

Очевидно, что $f' > f$, следовательно, при прочих равных условиях трение в клинчатом ползуне больше трения на плоскости.

Понятие приведенного коэффициента трения условно, так как он изменяется в зависимости от угла заострения клинчатого ползуна.

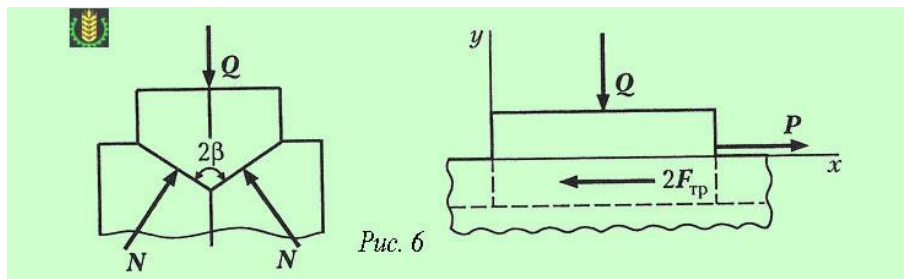


Рис. 6

По аналогии с движением тела вверх по наклонной плоскости под действием горизонтальной силы для равномерного перемещения клинчатого ползуна по направляющим, наклоненным к горизонту под углом α , нужно приложить горизонтальную силу равную

$$P = Q \operatorname{tg}(\alpha + \varphi').$$

Трение в крепежной метрической резьбе подобно трению клинчатого ползуна с углом заострения $2\beta = 120^\circ$, для трапецеидальной резьбы угол $2\beta = 150^\circ$.

С трением связано понятие угла естественного откоса - наибольшим углом между наклонной плоскостью и горизонтом, при котором сыпучее тело удерживает свои частицы на поверхности, без их движения (осыпания) вниз. Угол естественного откоса сыпучего тела равен углу трения между его частицами. Этот угол приходится принимать во внимание, например, при различных земляных работах на уклонах и скатах.

Центр тяжести

Центр параллельных сил

Центром параллельных сил называется такая точка на линии действия равнодействующей системы параллельных сил, через которую проходит равнодействующая и в том случае, если все силы системы повернуть вокруг их точек приложения на один и тот же угол, сохраняя параллельность сил.



Покажем существование центра параллельных сил на системе двух сил F_1 и F_2 (см. рисунок 1). На основании теоремы о сложении двух параллельных сил, направленных в одну сторону, определим равнодействующую этих сил и положение линии ее действия по формулам:

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2; \quad F_1/F_2 = BC/AC.$$

Нетрудно увидеть, что точка C , лежащая на линии AB , соединяющей точки приложения данных сил, является центром двух параллельных сил F_1 и F_2 , так как при повороте их на один и тот же угол α отношение плеч BC и CA не изменится, и равнодействующая также пройдет через точку C .

Если дана система параллельных сил, то равнодействующую этой системы можно найти, последовательно попарно складывая все силы. На линии действия равнодействующей системы параллельных сил также будет существовать точка, обладающая свойствами центра параллельных сил, т. е. если все силы системы вращать вокруг этой точки, равнодействующая этих сил все равно останется приложенной к этой точке.

Выведем формулы для определения координат центра системы n параллельных сил.

Пусть даны пространственная система n параллельных сил и равнодействующая этой системы. Выберем систему осей координат и обозначим координаты точки приложения сил данной системы и координаты точки приложения равнодействующей (см. рисунок 2).

Запишем моменты сил данной системы относительно оси y . Для того, чтобы легче представить, чему равен момент силы относительно оси, следует мысленно перенести силу вдоль линии ее действия до положения, когда точка приложения силы окажется в плоскости координатных осей (см. рисунок 2, сила F_1'):



$$M_y(F_1) = F_1 x_1,$$

$$M_y(F_2) = F_2 x_2,$$

$$M_y(F_n) = F_n x_n,$$

$$M_y(F_{\Sigma}) = F_{\Sigma} x_C.$$

Применим теорему о моменте равнодействующей относительно оси. Тогда:

$$F_{\Sigma}x_C = F_1x_1 + F_2x_2 + \dots + F_nx_n, \quad \text{откуда}$$

$$x_C = (F_1x_1 + F_2x_2 + \dots + F_nx_n)/F_{\Sigma}.$$

Записав моменты сил относительно оси x и вновь применив теорему о моменте равнодействующей, получим:

$$y_C = (F_1y_1 + F_2y_2 + \dots + F_ny_n)/F_{\Sigma}.$$

Для определения координаты z_C повернем все силы системы вокруг их точек приложения в одну сторону так, чтобы силы стали параллельны оси y . При этом точка C не изменит своего положения, так как она является центром параллельных сил данной системы.

Запишем моменты всех сил относительно оси x и применим теорему о моменте равнодействующей, в результате получим:

$$z_C = (F_1z_1 + F_2z_2 + \dots + F_nz_n)/F_{\Sigma}.$$

Равнодействующая системы параллельных сил равна их алгебраической сумме, т. е. $F_{\Sigma} = \Sigma F_i$. Применив сокращенную формулу записи, получим формулы для определения координат центра параллельных сил в следующем виде:

$$x_C = \Sigma(F_ix_i)/\Sigma F_i; \quad y_C = \Sigma(F_iy_i)/\Sigma F_i; \quad z_C = \Sigma(F_iz_i)/\Sigma F_i.$$

Заметим, что в полученных формулах силы и моменты сил берут со знаком согласно ранее установленным правилам (если вектор силы направлен по направлению координатной оси, сила считается положительной, и наоборот, а момент силы считается положительным, если его вращающее действие относительно точки направлено против часовой стрелки).

Определение положения центра тяжести

Уникальность центра системы параллельных сил заключается в том, что равнодействующая сил системы, приложенная в этом центре, не создает относительно него вращающего момента, поскольку плечо равнодействующей равно нулю. Полученные выше формулы для определения координат центра системы параллельных сил на практике чаще всего используют для нахождения центра тяжести различных тел и фигур.

Сила, с которой тело притягивается к Земле, называется силой тяжести. Элементарной частицей тела называется такая малая частица, положение которой в пространстве определяется координатами одной точки.

Рассмотрим тело, состоящее из большого количества элементарных частиц. Силы тяжести каждой

частицы, направленные к центру Земли, образуют систему сходящихся сил, но для тел, размеры которых ничтожно малы по сравнению с размерами нашей планеты, с достаточной степенью точности можно считать эти силы системой параллельных сил.

Центром тяжести тела называется центр параллельных сил тяжести всех элементарных частиц этого тела.

Очевидно, что силы тяжести частиц тела образуют относительно центра тяжести систему параллельных сил, равнодействующая которой не имеет вращающего действия. Это свойство равнодействующей, проходящей через центр тяжести тела, используют, например, для балансировки колес, валов, при расчетах конструкций на устойчивость и т. п.

Центр тяжести является геометрической точкой, которая может лежать вне тела (например, кольцо, изогнутое тело и т. п.). Центр тяжести будем обозначать точкой C .

Координаты центра тяжести тела находят по тем же формулам, что и координаты центра параллельных сил:

$$x_C = \Sigma(G_i x_i) / \Sigma F_i; \quad y_C = \Sigma(G_i y_i) / \Sigma F_i; \quad z_C = \Sigma(G_i z_i) / \Sigma G_i,$$

где G_i - сила тяжести каждой элементарной частицы тела; x_i, y_i, z_i – координаты частицы; ΣG_i – сила тяжести всего тела.

В случае однородных тел по таким же формулам можно определять координаты центра тяжести объемов, площадей и линий, представив G_i , как произведение удельной массы (удельной силы тяжести) тела на его объем:

$G_i = \gamma V_i$, где γ – удельная сила тяжести (для однородного тела γ – величина постоянная). Если подставить эти зависимости в выведенные ранее формулы, и сократить на постоянный множитель γ , получим координаты центра тяжести для объема однородного тела:

$$x_C = \Sigma(V_i x_i) / \Sigma V_i; \quad y_C = \Sigma(V_i y_i) / \Sigma V_i; \quad z_C = \Sigma(V_i z_i) / \Sigma V_i.$$

При помощи аналогичных преобразований можно вывести формулы для нахождения координат центра тяжести плоской фигуры (пластины), имеющей одинаковую толщину h по всей площади: если $G_i = \gamma h A_i$, (здесь A_i – площадь элементарной площадки пластины), то

$$x_C = \Sigma(A_i x_i) / \Sigma A_i; \quad y_C = \Sigma(A_i y_i) / \Sigma A_i; \quad z_C = \Sigma(A_i z_i) / \Sigma A_i.$$

Если тело, например, представляет собой однородную проволоку, постоянного поперечного сечения A (т. е. линию), то сила тяжести элементарной частицы, выраженная через длину l_i (после аналогичных математических преобразований) равна:

$$x_C = \Sigma(l_i x_i) / \Sigma l_i; \quad y_C = \Sigma(l_i y_i) / \Sigma l_i; \quad z_C = \Sigma(l_i z_i) / \Sigma l_i.$$

Центр тяжести

Методы нахождения центра тяжести

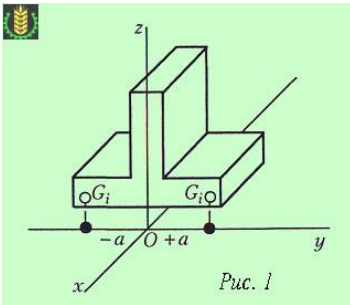
Наиболее часто для нахождения центра тяжести тела или фигуры применяют следующие методы:

- *метод симметрии;*
- *метод разбиения;*
- *метод отрицательных масс.*

Рассмотрим приемы, применяемые в каждом из перечисленных методов.

Метод симметрии

Представим себе однородное тело, которое имеет плоскость симметрии. Выберем такую систему координат, чтобы оси x и z лежали в плоскости симметрии (см. рисунок 1).



В этом случае каждой элементарной частице силой тяжести G_i с абсциссой $y_i = +a$ соответствует такая же элементарная частица с абсциссой $y_i = -a$, тогда:

$$y_C = \Sigma(G_i x_i) / \Sigma G_i = 0.$$

Отсюда вывод: если однородное тело имеет плоскость симметрии, то центр тяжести тела лежит в этой плоскости.

Аналогично можно доказать и следующие положения:

- Если однородное тело имеет ось симметрии, то центр тяжести тела лежит на этой оси;
- Если однородное тело имеет две оси симметрии, то центр тяжести тела находится в точке их пересечения;
- Центр тяжести однородного тела вращения лежит на оси вращения.

Метод разбиения

Этот метод заключается в том, что тело разбивают на наименьшее число частей, силы тяжести и положение центров тяжести которых известны, после чего применяют приведенные ранее формулы для определения общего центра тяжести тела.

Допустим, что мы разбили тело силой тяжести G на три части G' , G'' , G''' , абсциссы центров тяжести этих частей x'_C , x''_C , x'''_C известны.

Формула для определения абсциссы центра тяжести всего тела:

$$x_C = \Sigma(G_i x_i) / \Sigma G_i.$$

Перепишем ее в следующем виде:

$$x_C \Sigma G_i = \Sigma(G_i x_i) \quad \text{или} \quad G x_C = \Sigma(G_i x_i).$$

Последнее равенство запишем для каждой из трех частей тела отдельно:

$$G'x'_C = \Sigma(G'x'_i), \quad G''x''_C = \Sigma(G''x''_i), \quad G'''x'''_C = \Sigma(G'''x'''_i).$$

Сложив левые и правые части этих трех равенств, получим:

$$G'x'_C + G''x''_C + G'''x'''_C = \Sigma(G'x'_i) + \Sigma(G''x''_i) + \Sigma(G'''x'''_i) = \Sigma(G_i x_i).$$

Но правая часть последнего равенства представляет собой произведение Gx_C , так как

$$Gx_C = \Sigma(G_i x_i),$$

Следовательно, $x_C = (G'x'_C + G''x''_C + G'''x'''_C)/G$, что и требовалось доказать. Аналогично определяются координаты центра тяжести на координатных осях y и z :

$$y_C = (G'y'_C + G''y''_C + G'''y'''_C)/G,$$

$$z_C = (G'z'_C + G''z''_C + G'''z'''_C)/G.$$

Полученные формулы аналогичны формулам для определения координат центра тяжести, выведенные выше. Поэтому в исходные формулы можно подставлять не силы тяжести элементарных частиц G_i , а силы тяжести конечных частей; под координатами x_i, y_i, z_i понимают координаты центров тяжести частей, на которые разбито тело.

Метод отрицательных масс

Этот метод заключается в том, что тело, имеющее свободные полости, считают сплошным, а массу свободных полостей – отрицательной. Вид формул для определения координат центра тяжести тела при этом не меняется.

Таким образом, при определении центра тяжести тела, имеющего свободные полости, следует применять метод разбиения, но считать массу полостей отрицательной.

Практические методы определения центра тяжести тел

На практике для определения центра тяжести плоских тел сложной формы часто применяют **метод подвешивания**, который заключается в том, что плоское тело подвешивают на нити за какую-нибудь

точку. Прочерчивают вдоль нити линию, и тело подвешивают за другую точку, не находящуюся на полученной линии.

Затем вновь проводят линию вдоль нити.

Точка пересечения двух линий и будет являться центром тяжести плоского тела.

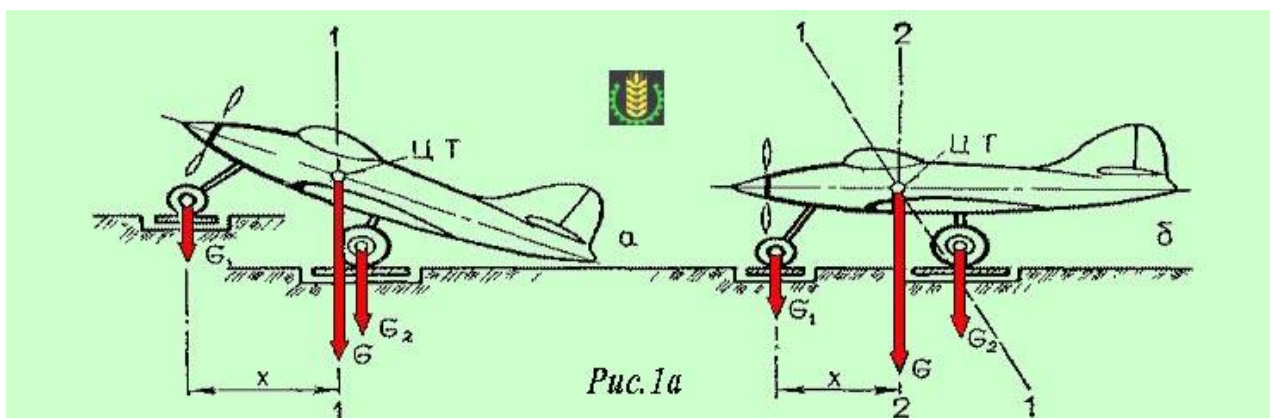


Рис. 1а

Еще один способ определения центра тяжести, применяемый на практике, называется **метод взвешивания**. Этот метод часто применяется для определения центра тяжести крупных машин и изделий – автомобилей, самолетов, колесных тракторов и т. п., которые имеют сложную объемную форму и точечную опору на грунт.

Метод заключается в применении условий равновесия, исходя из того, что сумма моментов всех сил, действующих на неподвижное тело равна нулю.

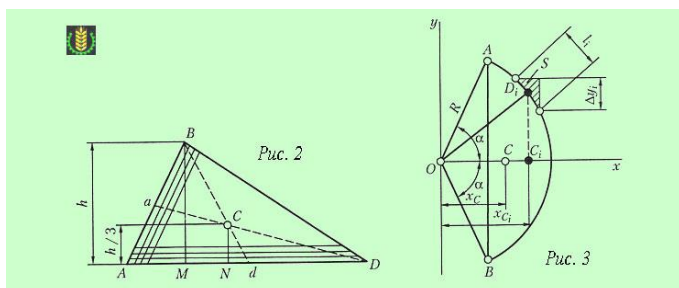
Практически это осуществляется взвешиванием одной из опор машины (задние или передние колеса устанавливаются на весы), при этом показания весов, по сути, являются реакцией опоры, которая учитывается при составлении уравнения равновесия относительно второй точки опоры (находящейся вне весов).

По известной массе (соответственно – весу) тела, показанию весов в одной из точек опоры, и расстоянию между точками опоры можно определить расстояние от одной из точек опоры до плоскости, в которой расположен центр тяжести.

Чтобы найти подобным образом линию (ось), на которой расположен центр тяжести машины, необходимо произвести два взвешивания по принципу, изложенному выше для метода подвешивания (см. рис. 1а).

Положение центра тяжести некоторых фигур

Прямоугольник. Так как прямоугольник имеет две оси симметрии, то центр тяжести его площади находится в точке пересечения этих осей, иначе говоря, в точке пересечения диагоналей прямоугольника.



Треугольник. Пусть дан треугольник ABD (см. рисунок 2).

Разобьем его на элементарные (бесконечно узкие) полоски, параллельные стороне AD . Центр тяжести каждой полоски будет лежать на медиане Bd (т. е. в середине каждой полоски), следовательно, на этой медиане будет лежать и центр тяжести всей площади треугольника. Разбив треугольник на элементарные полоски, параллельные стороне AB , увидим, что искомый центр тяжести лежит и на медиане aD .

Проделав аналогичное действие с треугольником относительно стороны BD , получим тот же результат – центр тяжести находится на соответствующей медиане.

Следовательно, центр тяжести всей площади треугольника лежит на точке пересечения его медиан, поскольку эта точка является единственной общей точкой для всех трех медиан данной геометрической фигуры.

Из геометрии известно, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в соотношении 1:2 от основания. Следовательно, центр тяжести треугольника расположен на расстоянии одной трети высоты от каждого основания.

Дуга окружности. Возьмем дугу окружности AB радиусом R с центральным углом 2α (см. рисунок 3). Систему координат выберем так, чтобы начало координат было в центре окружности, а ось x делила дугу пополам, тогда $y_C = 0$ вследствие симметрии дуги относительно оси x . Определим координату центра тяжести x_C .

Разобьем дугу AB на элементарные части l_i , одна из которых изображена на рисунке. Тогда, согласно сделанным выше выводам,

$$x_C = \frac{\sum(l_i x_{Ci})}{\sum l_i}.$$

Дугу l_i вследствие малости примем за отрезок прямой. Из подобия треугольника OD_iC_i и элементарного треугольника S (на рисунке заштрихован) получим:

$$l_i / \Delta y_i = R / x_{Ci} \quad \text{или} \quad l_i x_{Ci} = R \Delta y_i.$$

Тогда:

$$x_C = \frac{\sum(l_i x_{Ci})}{\sum l_i} = \frac{\sum(R \Delta y_i)}{l} = \frac{R \sum \Delta y_i}{l} = \frac{R \times AB}{l},$$

поскольку $R \sum \Delta y_i = AB$, а $\sum l_i = l$ – длина дуги AB . Но $AB = 2R \sin \alpha$, а $l = 2R\alpha$, следовательно,

$$x_C = \frac{(R \sin \alpha)}{\alpha}.$$

При $\alpha = \pi/2$ рад (полуокружность), $x_C = 2R/\pi$.

Круговой сектор. Возьмем сектор радиусом R с центральным углом 2α (см. рисунок 3а). Проведем оси координат, как показано на рисунке (ось x направлена вдоль оси симметрии сектора), тогда $y_C = 0$.

Определим x_C , для чего разобьем сектор на ряд элементарных секторов, каждый из которых из-за



малости дуги l_i можно принять за равнобедренный треугольник с высотой R . Тогда центр тяжести каждого элементарного сектора будет находиться на дуге радиуса $2R/3$ и задача определения центра тяжести сектора сводится к определению центра тяжести этой дуги. Очевидно, что

$$x_C = 2 R \sin\alpha / (3\alpha).$$

При $\alpha = \pi/2$ рад (полукруг): $x_C = 4R/(3\pi)$.

Пример решения задачи на определение центра тяжести



Задача: Определить положение центра тяжести сечения, составленного из двутавра № 22 и швеллера № 20, как показано на *рисунке 4*.

Решение. Из курса инженерной графики известно, что номер проката соответствует наибольшему габаритному размеру его сечения, выраженного в сантиметрах.

Так как сечение, составленное из двутавра и швеллера, представляет собой фигуру, симметричную относительно оси y , то центр тяжести такого сечения лежит на этой оси, т. е. $x_C = 0$.

По справочнику определим площади и координаты центров тяжести двутавра **1** и швеллера **2**.

Для двутаврового сечения: $A_1 = 15,2 \text{ см}^2$; $y_1 = 22/2 = 11 \text{ см}$.

Для швеллерного сечения: $A_2 = 12 \text{ см}^2$; $y_2 = 22 + d - z_0 = 22 + 0,32 - 1,25 = 21,07 \text{ см}$,

где d – толщина стенки швеллера; z_0 – размер, определяющий положение центра тяжести швеллера.

Применим формулу для определения координаты центра тяжести всего сечения:

$$y_C = \Sigma(A_i y_i) / \Sigma A_i,$$

тогда:

$$y_C = (A_1 y_1 + A_2 y_2) / (A_1 + A_2) = (15,2 \times 11 + 12 \times 21,07) / (15,2 + 12) = 15,4 \text{ см}.$$

Задача решена.

1.2 Кинематика

Кинематика точки

Кинематика – часть теоретической механики, в которой изучаются движения материальных тел без учета их масс и действующих на них сил.

Когда в механике говорят о движении тела, то подразумевают под этим изменение с течением времени его положения в пространстве по отношению к другим телам.

Обычно с телом, по отношению к которому изучают движение, связывают какую-нибудь систему координат, которую вместе с выбранным способом измерения времени называют системой отсчета. Если координаты всех точек тела в выбранной системе отсчета остаются неизменными во времени, то тело находится в покое.

Если рассматривается движение тела по отношению к условно неподвижной системе отсчета, то

движение называют *абсолютным*; движение тела по отношению к подвижной системе отсчета называют *относительным*.

В мире все находится в непрерывном движении, поэтому все движения являются относительными, однако условно можно представить себе и абсолютное движение, например, движение по отношению к Земле.

Итак, движение тело совершается в пространстве с течением времени. Пространство и время, как и движение, согласно учению диалектического материализма – формы существования материи.

Классическая механика полагает, что пространство и время имеют абсолютный, независимый друг от друга характер, и что их свойства не зависят от распределения и движения материи.

Такая точка мировоззрения господствовала в науке до начала XX века, пока гениальный А. Эйнштейн (1879-1955) не поставил ее под сомнение своей теорией относительности. Этот человек сломал вековое представление человечества о самом главном – об абсолютности времени и пространства. Теория относительности Эйнштейна – это современная физическая теория пространства и времени, связывающая эти доселе незыблемые независимые постулаты с движением, массой и энергией.

До А. Эйнштейна считалось, что все в мире относительно. Если тело движется по отношению к какой-либо подвижной системе, то оно имеет другой характер движения по отношению к той системе, относительно которой движется данная система. Это утверждение являлось одним из китов, на которых восседала наука до начала прошлого века.

Теория относительности Эйнштейна основывается на том, что скорость света является постоянной величиной, не зависящей от скорости источника этого света. На основании этого противоречащего здравому смыслу вывода можно утверждать, что и пространство, и время – суть понятия относительные, зависящие от скорости света.

Гениальность Эйнштейна заключается в том, что он увидел и объял неочевидное. Современная физика, на основании множества экспериментов, опытов и исследований полностью подтвердила его теорию.

Тем не менее, несмотря на открытия Эйнштейна, классическая механика не потеряла свою актуальность, так как при скоростях движения, далеких от скорости света, результаты, даваемые классической механикой, ничтожно мало отличаются от результатов механики теории относительности и вполне пригодны для практики. Можно сказать, что классическая механика является частным случаем механики теории относительности, предполагающая упрощенные расчеты с допустимыми погрешностями.

Основные определения кинематики

Чтобы понять смысл определений кинематики следует ознакомиться с понятиями и определениями другого раздела технической механики – теорией механизмов и машин, которая занимается применением законов теоретической механики для практических расчетов деталей, механизмов и машин.

Механизмом называется совокупность связанных между собой тел, имеющих определенные движения и служащих для передачи и преобразования движения.

Машиной называют механизм или сочетание механизмов, служащих для преобразования энергии (энергетические машины), изменения формы, свойств, состояния и положения предмета труда (рабочие машины), или для сбора, переработки и использования информации (информационные машины). Таким образом, любая машина состоит из одного или нескольких механизмов, но не всякий механизм является машиной, т. е. машина – понятие более широкое.

Простейшей частью любой машины является ее **звено** – одно тело или неизменяемое во время работы машины сочетание группы тел.

Два звена, соединенные между собой и допускающие относительное движение, называются **кинематической парой**.

Кинематические пары бывают **нижние** и **высшие**. Звенья низших пар соприкасаются по поверхностям (поступательные, вращательные и винтовые пары), звенья высших пар соприкасаются по линиям и точкам (зубчатые пары, подшипники качения и т. п.).

Совокупность кинематических пар называется **кинематической цепью**.

Кинематические пары и цепи могут быть плоскими и пространственными. Механизм – это кинематическая цепь, у которой одно из звеньев лишено движения (закреплено). Такое звено называют **станиной** или **стойкой**.

Звено, вращающееся вокруг неподвижной оси, называют **кривошипом**, качающееся вокруг подвижной оси – **балансиром** или **коромыслом**.

Звено, совершающее сложное движение параллельно какой-то плоскости, называют **шатунном**.

Звено, совершающее возвратно-поступательное движение по станине или стойке, называют **ползуном**.

Ведущим звеном механизма считается то, которому извне сообщается определенное движение, передаваемое посредством этого звена другим звеньям, называемым **ведомыми**.

Кинематика изучает закономерности относительного движения и перемещения отдельных звеньев механизмов, без учета сил, вызывающих эти движения и перемещения.

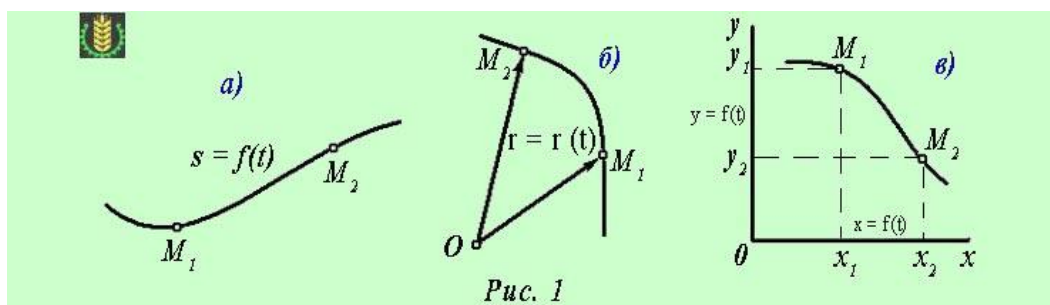
Основными физическими величинами, которыми оперирует кинематика, являются расстояние (длина) и время. Единицей измерения длины в системе СИ является метр (*м*), единицей измерения времени – секунда (*с*).

Способы задания движения точки

Знание законов движения тела означает знание законов движения каждой его точки, поэтому изучение кинематики основывается на изучении геометрии движения точки.

Траекторией точки называется множество (геометрическое место) положений движущейся точки в рассматриваемой системе отсчета. Проще говоря, траектория движения – это линия, которую описывает подвижная точка относительно выбранной системы отсчета. В зависимости от формы траектории различают прямолинейное и криволинейное движение.

Движение любой точки тела можно описать (задать) тремя способами – естественным, векторным и координатным (см. рисунок 1).



Естественный способ (рис. 1а) заключается в том, что движение точки задается ее траекторией, началом отсчета и уравнением движения по этой траектории (законом движения). В общем виде уравнение движения записывается так: $s = f(t)$, где s – расстояние от точки до начального положения (начала отсчета), являющееся функцией времени; t – время движения точки от начального отсчета.

Зная траекторию и закономерность (уравнение) движения точки по этой траектории, можно в любой момент времени определить, где она находится.

При своем движении точка проходит некоторый путь, который также является функцией времени. Следует отметить, что путь, пройденный точкой, совпадает с расстоянием от начала отсчета лишь в том случае, если траектория движения точки представляет собой прямую линию, и точка движется по ней в одном направлении, а начало движения точки совпадает с началом отсчета.

Векторный способ (рис. 1б) основывается на том, что положение точки в пространстве однозначно определяется радиусом-вектором r , проведенным из некоторого неподвижного центра к данной точке. При этом положение точки в данный момент времени определяется направлением и модулем вектора. Математически функция изменения радиуса-вектора от времени записывается так:

$$r = rf(t)$$

Координатный способ (рис. 1в) заключается в том, что движение точки задается движением ее проекций вдоль осей координат. В общем виде уравнение движения точки можно записать следующим образом:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$

Зная уравнения движения точки в координатной форме, можно, подставив в эти уравнения время, определить положение проекций точки, а, следовательно, и самой точки в любой момент времени.

Если точка движется в плоскости, то для определения ее местоположения в данный момент времени достаточно знать две координаты, если движение происходит по прямой – достаточно одной координаты.

Скорость и ускорение

Скорость точки

В предыдущей статье движение тела или точки определено, как изменение положения в пространстве с течением времени. Для того чтобы более полно охарактеризовать качественные и количественные стороны движения введены понятия скорости и ускорения.

Скорость – это кинематическая мера движения точки, характеризующая быстроту изменения ее положения в пространстве.

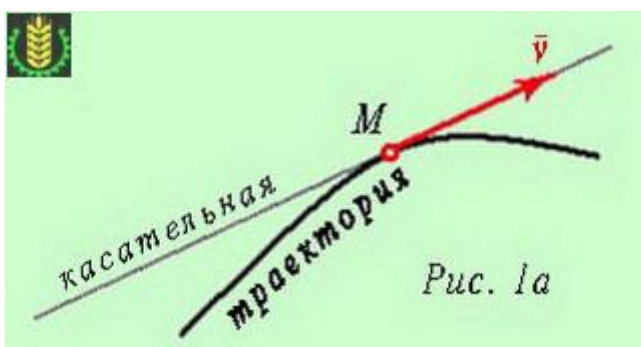
Скорость является векторной величиной, т. е. она характеризуется не только модулем (скалярной составляющей), но и направлением в пространстве.

Как известно из физики, при равномерном движении скорость может быть определена длиной пути, пройденного за единицу времени: $v = s/t = \text{const}$ (предполагается, что начало отсчета пути и времени совпадают). При прямолинейном движении скорость постоянна и по модулю, и по направлению, а ее вектор совпадает с траекторией.

Единица скорости в системе СИ определяется соотношением длина/время, т. е. $м/с$.

Очевидно, что при криволинейном движении скорость точки будет меняться по направлению. Для того, чтобы установить направление вектора скорости в каждый момент времени при криволинейном движении, разобьем траекторию на бесконечно малые участки пути, которые можно считать (вследствие их малости) прямолинейными. Тогда на каждом участке условная скорость v_n такого прямолинейного движения будет направлена по хорде, а хорда, в свою очередь, при бесконечном уменьшении длины дуги (Δs стремится к нулю), будет совпадать с касательной к этой дуге. Из этого следует, что при криволинейном движении вектор скорости в каждый момент времени совпадает с касательной к траектории (рис. 1а). Прямолинейное движение можно представить, как частный случай криволинейного движения по дуге, радиус которой стремится к бесконечности (траектория совпадает с касательной).

При неравномерном движении точки модуль ее скорости с течением времени меняется. Представим себе точку, движение которой задано естественным способом уравнением $s = f(t)$.



Если за небольшой промежуток времени Δt точка прошла путь Δs , то ее средняя скорость равна:

$$v_{cp} = \Delta s / \Delta t.$$

Средняя скорость не дает представления об истинной скорости в каждый данный момент времени (истинную скорость иначе называют мгновенной). Очевидно, что чем меньше промежуток времени, за который определяется средняя скорость, тем ближе ее значение будет к мгновенной скорости.

Истинная (мгновенная) скорость есть предел, к которому стремится средняя скорость при Δt , стремящемся к нулю:

$$v = \lim v_{cp} \text{ при } t \rightarrow 0 \text{ или } v = \lim (\Delta s / \Delta t) = ds/dt.$$

Таким образом, числовое значение истинной скорости равно $v = ds/dt$. Истинная (мгновенная) скорость при любом движении точки равна первой производной координаты (т. е. расстояния от начала отсчета перемещения) по времени.

При Δt стремящемся к нулю, Δs тоже стремится к нулю, и, как мы уже выяснили, вектор скорости будет направлен по касательной (т. е. совпадает с вектором истинной скорости v). Из этого следует, что предел вектора условной скорости v_n , равный пределу отношения вектора перемещения точки к бесконечно малому промежутку времени, равен вектору истинной скорости точки.

Ускорение точки в прямолинейном движении

В общем случае движение точки с изменяющейся во времени скоростью называют ускоренным, при этом считая ускорение, вызывающее уменьшение скорости, отрицательным. Иногда движение, в котором скорость с течением времени уменьшается, называют замедленным.

Ускорение есть кинематическая мера изменения скорости точки во времени. Другими словами - ускорение - это скорость изменения скорости.

Как и скорость, ускорение является величиной векторной, т. е. характеризуется не только модулем, но и направлением в пространстве.

При прямолинейном движении вектор скорости всегда совпадает с траекторией и поэтому вектор изменения скорости тоже совпадает с траекторией.

Из курса физики известно, что ускорение представляет собой изменение скорости в единицу времени. Если за небольшой промежуток времени Δt скорость точки изменилась на Δv , то среднее ускорение за данный промежуток времени составило: $a_{cp} = \Delta v / \Delta t$.

Среднее ускорение не дает представление об истинной величине изменения скорости в каждый момент времени. При этом очевидно, что чем меньше рассматриваемый промежуток времени, во время которого произошло изменение скорости, тем ближе значение ускорения будет к истинному (мгновенному). Отсюда определение: истинное (мгновенное) ускорение есть предел, к которому стремится среднее ускорение при Δt , стремящемся к нулю:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_{cp} \quad \text{или} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta v / \Delta t = dv/dt.$$

Учитывая, что $v = ds/dt$, получим: $a = dv/dt = d^2s/dt^2$.

Истинное ускорение в прямолинейном движении равно первой производной скорости или второй производной координаты (расстояния от начала отсчета перемещения) по времени.

Единица ускорения - метр, деленный на секунду в квадрате (m/c^2).

Ускорение точки в криволинейном движении

При движении точки по криволинейной траектории скорость меняет свое направление, т. е. вектор скорости является переменной величиной.

Представим себе точку M , которая за время Δt , двигаясь по криволинейной траектории, переместилась в положение M_1 (рис. 1).

Вектор приращения (изменения) скорости обозначим Δv , тогда: $\Delta v = v_1 - v$.

Для нахождения вектора Δv перенесем вектор v_1 в точку M и построим треугольник скоростей. Определим вектор среднего ускорения:

$$a_{cp} = \Delta v / \Delta t.$$



Вектор a_{cp} параллелен вектору Δv , так как от деления векторной величины на скалярную направление вектора не меняется.

Вектор истинного ускорения есть предел, к которому стремится отношение вектора приращения скорости к соответствующему промежутку времени, когда последний стремится к нулю:

$$a = \lim \Delta v / \Delta t \text{ при } t \rightarrow 0.$$

Такой предел называют векторной производной.

Таким образом, **истинное ускорение точки в криволинейном движении равно векторной производной скорости по времени.**

Из рисунка 1 видно, что вектор ускорения в криволинейном движении всегда направлен в сторону вогнутости траектории.

Так как векторную производную непосредственно вычислять мы не умеем, то ускорение в криволинейном движении будем определять косвенными методами. Так, например, если движение точки задано естественным способом, то применяется теорема о проекции ускорения на касательную и нормаль. Чтобы понять суть этой теоремы, следует рассмотреть понятие кривизны кривых линий.

Понятие о кривизне кривых линий

Рассмотрим криволинейную траекторию точки M (рис. 2а).

Угол $\Delta\varphi$ между касательными к кривой в двух соседних точках называется **углом смежности**.



Кривизной кривой в данной точке называется предел отношения угла смежности $\Delta\varphi$ к соответствующей длине Δs дуги, когда последняя стремится к нулю.

Обозначим кривизну буквой k , тогда:

$$k = \lim \Delta\varphi / \Delta s \text{ при } \Delta s \rightarrow 0.$$

Рассмотрим окружность радиуса R (см. рисунок 2б).

Так как $\Delta s = R\Delta\varphi$, то:

$$k = \lim \Delta\varphi / \Delta s = \lim \Delta\varphi / R\Delta s = 1/R \text{ (при } \Delta s \rightarrow 0).$$

Следовательно, кривизна окружности во всех точках одинакова и равна $k = 1/R$.

Для каждой точки данной кривой можно подобрать такую окружность, кривизна которой равна кривизне кривой в данной точке. Радиус ρ такой окружности называется *радиусом кривизны кривой* в данной точке, а центр этой окружности – *центром кривизны*.

Итак, *кривизна кривой в данной точке есть величина, обратная радиусу кривизны в данной точке*:

$$k = 1/\rho.$$

Очевидно, что кривизна прямой линии будет равна нулю, а поскольку радиус кривизны такой линии равен бесконечности.

Теорема о проекции ускорения на касательную и нормаль

Проекция ускорения на касательную к траектории называется касательным (тангенциальным) ускорением, а проекция ускорения на нормаль к этой касательной – нормальным ускорением.

Теорема: нормальное ускорение равно квадрату скорости, деленному на радиус кривизны траектории в данной точке; касательное ускорение – первой производной от скорости по времени.

Доказательство этой теоремы основывается на геометрических построениях с учетом приведенных ранее зависимостей перемещения, скорости и ускорения от времени. В данной статье доказательство теоремы не приводится; при необходимости, его можно рассмотреть в других источниках информации.

Итак, на основании теоремы об ускорениях, можно записать:

$$a_n = v^2/\rho; \quad a_\tau = dv/dt.$$

Анализируя формулы касательного и нормального ускорения можно сделать вывод, что касательное ускорение характеризует изменение скорости только по модулю, а нормальное – только по направлению.

Зная величину нормального и касательного ускорения, можно вычислить полное ускорение точки, применив теорему Пифагора:

$$a = \sqrt{(a_\tau^2 + a_n^2)}.$$

Направление ускорения: $\cos(a_\tau, a) = a_\tau/a$.

Часто касательное и нормальное ускорения рассматривают не как проекции, а как составляющие полного ускорения, т. е. как векторные величины.

Вектор нормального ускорения всегда направлен к центру кривизны, поэтому нормальное ускорение иногда называют *центростремительным*.

Виды движения точки в зависимости от ускорения

Анализируя формулы касательного и нормального ускорений, можно выделить следующие виды движения точки:

$a_n = v^2/\rho \neq 0$; $a_\tau = dv/dt \neq 0$, - неравномерное криволинейное (рис. 3а);

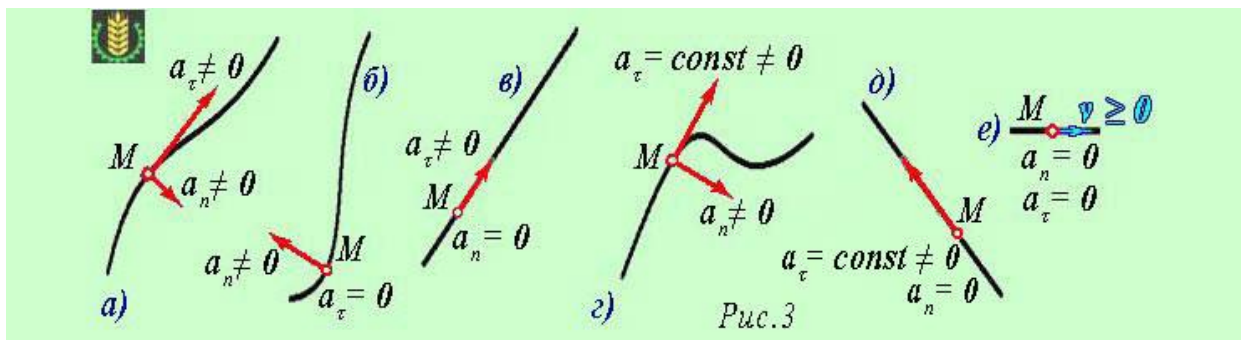
$a_n = v^2/\rho \neq 0$; $a_\tau = dv/dt = 0$, - равномерное криволинейное (рис. 3б);

$a_n = v^2/\rho = 0$; $a_\tau = dv/dt \neq 0$, - неравномерное прямолинейное (рис. 3в);

$a_\tau = dv/dt = const \neq 0$; $a_n = v^2/\rho \neq 0$, - равнопеременное криволинейное (рис. 3г);

$a_\tau = dv/dt = const \neq 0$, $a_n = v^2/\rho = 0$, - равнопеременное прямолинейное (рис. 3д);

$a_n = v^2/\rho = 0$; $a_\tau = dv/dt = 0$, - равномерное прямолинейное (движение без ускорения) (рис. 3е).



Теоремы о проекциях скорости и ускорения на координатную ось

Если движение точки задано координатным способом, то путь (перемещение), скорость и ускорение за промежуток времени Δt можно найти, используя проекции этих величин на координатную ось. Очевидно, что приращение любой из координат при Δt стремящемся к нулю тоже стремится к нулю, и предел такого приращения может быть определен из дифференциальных отношений, устанавливаемых теоремами о проекциях скорости и ускорения:

Теорема: проекция скорости на координатную ось равна первой производной от соответствующей координаты по времени:

$$v_{nx} = dx/\Delta t \quad v_{ny} = dy/\Delta t \quad v_{nz} = dz/\Delta t.$$

Теорема: проекция ускорения на координатную ось равна второй производной от соответствующей координаты по времени:

$$a_x = d^2x/\Delta t^2 \quad a_y = d^2y/\Delta t^2 \quad a_z = d^2z/\Delta t^2.$$

Зная проекции скорости или ускорения на координатные оси, можно определить модуль и направление вектора любой из этих величин, используя теорему Пифагора и тригонометрические соотношения.

Простейшие движения твердого тела

Поступательное движение

Различают два вида простейшего движения твердого тела: поступательное движение и вращение вокруг неподвижной оси.

Движение тела, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается параллельной своему первоначальному положению, называется поступательным. Так, например, поршень двигателя относительно других деталей и узлов (гильзы, блока, головки цилиндров и т. п.) совершает поступательное движение.

Закономерности перемещения всех точек тела при поступательном движении можно описать движением любой из его точек. Этот вывод опирается на утверждения теоремы о поступательном движении твердого тела.

Теорема: при поступательном движении все точки твердого тела имеют одинаковые траектории, скорости и ускорения.

Пусть за время Δt тело, двигаясь поступательно, переместилось из положения AB в положение A_1B_1 , причем произвольная точка A прошла путь Δs_A , а другая произвольная точка B прошла путь Δs_B по некоторым траекториям (дугам) AA_1 и BB_1 (см. рис. 1).

Требуется доказать, что траектории, скорости и ускорения точек A и B при поступательном перемещении были одинаковы.

Соединим точки A и A_1 , B и B_1 хордами. Так как $AB = A_1B_1$ (поскольку тело является твердым, и расстояние между его частями и точками неизменно), а $AB \parallel A_1B_1$ (по определению поступательного движения, любая прямая внутри тела перемещается параллельно своему первоначальному положению), то фигура ABB_1A_1 – па-

раллелограмм. Следовательно, хорда AA_1 равна и параллельна хорде BB_1 .

Возьмем промежуточное положение прямой A_2B_2 и соединим концы этого отрезка с точками A и A_1 , B и B_1 , как показано на рисунке.

Аналогично предыдущему можно доказать, что вписанные ломаные линии AA_2A_1 и BB_2B_1 имеют попарно равные и параллельные стороны.

Если бесконечное число раз удваивать число сторон этих ломаных линий, то в пределе они дадут дуги Δs_A и Δs_B . Но так как эти ломаные линии всегда одинаковы, то они одинаковы и в пределе, следовательно, траектории произвольных точек A и B будут одинаковы.

Поскольку точки A и B выбраны произвольно, то, следовательно, траектории всех точек тела будут одинаковы.

Докажем теперь, что скорости и ускорения произвольных точек A и B , а, следовательно, и всех других точек тела в каждый данный момент времени будут равны.

Так как векторы перемещений точек A и B равны между собой ($AA_1 = BB_1$), то, разделив обе



части этого векторного равенства на Δt и перейдя к пределу при Δt стремящемся к нулю, получим:

$$\lim AA_1/\Delta t = \lim BB_1/\Delta t \text{ при } \Delta t \rightarrow 0.$$

Поскольку эти пределы являются векторами скоростей точек, следовательно $v_A = v_B$.

Перенесем векторы скоростей v_{AI} и v_{BI} в точки A и B и найдем векторы приращения скоростей Δv_A и Δv_B . Рассмотрим треугольники AMN и BM_1N_1 . Эти треугольники конгруэнтны (равны), и их равные стороны попарно параллельны, следовательно, $\Delta v_A = \Delta v_B$.

Разделим обе части этого векторного равенства на Δt и перейдя к пределу при Δt стремящемся к нулю, получим:

$$\lim \Delta v_A / \Delta t = \lim \Delta v_B / \Delta t \text{ при } \Delta t \rightarrow 0 \text{ или } a_A = a_B.$$

Теорема доказана.

Таким образом, поступательное движение твердого тела вполне определяется движением одной из его точек и, следовательно, все формулы кинематики точки применимы для тела, движущегося поступательно.

Вращение вокруг неподвижной оси

Движение, при котором по крайней мере две точки твердого тела или неизменяемой системы остаются неподвижными, называется вращательным; прямая линия, соединяющая эти две точки, называется осью вращения.

В определении вращательного движения говорится о неизменяемой системе, потому что ось вращения может лежать и вне тела.

Вращательное движение в технике встречается очень часто. Во многих машинах имеются звенья, совершающие вращательное движение, например, валы, шкивы, зубчатые колеса, ступицы и т. п.

Следует отметить, что понятие вращательного движения может относиться лишь к телу, но не к отдельной точке, и, например, движение точки по окружности является не вращательным, а криволинейным движением.

Рассмотрим диск, вращающийся вокруг оси, перпендикулярной плоскости чертежа (см. рис. 2).

Точка O – след этой оси.

Очевидно, что траектории точек вращающегося тела есть окружности различных радиусов, расположенные в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, с центрами, лежащими на этой оси.

Пусть за время Δt диск повернулся на угол ϕ . При этом точка A прошла путь s_A , а точка B – путь s_B .

Так как точки, находящиеся на различном расстоянии от оси вращения, за один и тот же промежуток времени проходят разные пути, то, следовательно, они имеют разные скорости и ускорения.

Отсюда следует, что линейное перемещение (путь), линейные скорость и ускорение точек не могут характеризовать вращательное движение тела в целом.

Вращательное движение тела можно характеризовать углом φ , на который повернулось тело за данный промежуток времени. Этот угол называется *угловым перемещением тела*.

Угловое перемещение тела выражается в радианах (*рад*) или оборотах (*об*); в последнем случае угловое перемещение обозначают N . Для установления зависимости между этими величинами составим пропорцию:

$$1 \text{ об} = 2\pi \text{ рад}, \quad N \text{ об} = \varphi \text{ рад}, \quad \text{откуда} \quad \varphi = 2\pi N \text{ рад},$$

где N – число оборотов тела.

Угловое перемещение есть функция времени, следовательно, закон вращательного движения в общем виде можно записать так: $\varphi = f(t)$.

Из *рис. 2* видно, что путь любой точки вращающегося тела может быть определен из уравнения: $s = r\varphi$, где r – расстояние от точки до оси вращения.

Скорость любой точки тела определяется так:

$$v = ds/dt = d(r\varphi)/dt = r(d\varphi/dt)$$

(r вынесли за знак производной, так как для данной точки твердого тела эта величина постоянна).

Выражение $d\varphi/dt$ называется *угловой скоростью* и обозначается ω .

Угловая скорость есть кинематическая мера движения вращающегося тела, характеризующая быстроту его углового перемещения: $\omega = d\varphi/dt$.

Угловая скорость равна первой производной углового перемещения по времени. Единица угловой скорости – радиан в секунду (*рад/с*).

Формула для определения скорости любой точки вращающегося тела имеет следующий вид:

$$v = \omega r.$$

Скорость точки в каждый момент времени прямо пропорциональна ее расстоянию от оси вращения, следовательно, график скоростей точек, например, диаметра B_1B_2 , будет представлять собой два треугольника. Очевидно, что вектор скорости точки вращающегося тела направлен перпендикулярно радиусу, соединяющему эту точку с осью вращения.

Если точка лежит на поверхности вращающегося тела, то ее скорость называют *окружной*.

В технике часто скорость вращения выражают в оборотах в минуту, обозначают буквой n и называют *частотой вращения*. Зависимость между угловой скоростью и частотой вращения выглядит так:

$$\omega = \pi n/30 \text{ рад/с}, \text{ где } n = \text{частота вращения тела (об/мин)}.$$

Различные случаи вращательного движения

Равномерное вращательное движение

Если тело вращается вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью, то движение называется равномерным.

При этом:

$$\omega = \text{const}; \quad \varphi = \omega t.$$

Касательное, нормальное и полное ускорения любой точки равномерно вращающегося тела определяют так:

$$a_{\tau} = 0; \quad a_n = \omega^2 r; \quad a = a_n = \omega^2 r.$$

Неравномерное вращательное движение

Если угловая скорость вращающегося тела с течением времени меняется, то движение называется неравномерным.

В самом общем виде формулы неравномерного вращательного движения выглядят так:

$$\varphi = f(t); \quad \omega = \Delta\varphi/\Delta t.$$

Касательное движение любой точки неравномерно вращающегося тела определяют следующим образом:

$$a_{\tau} = dv/dt = d(\omega r)/dt = r(d\omega/dt).$$

Выражение $d\omega/dt$ обозначают α (альфа) и называют *угловым ускорением*.

Угловое ускорение есть кинематическая мера изменения угловой скорости вращающегося тела:

$$\alpha = d\omega/dt = d^2\varphi/dt^2.$$

Угловое ускорение равно первой производной угловой скорости или второй производной углового перемещения по времени. Единица углового ускорения – радиан на секунду в квадрате ($\text{рад}/\text{с}^2$).

Формулу для определения касательного ускорения любой точки неравномерно вращающегося тела можно записать в таком виде: $a_{\tau} = \alpha r$.

Нормальное ускорение определяется по такой же формуле, как и в случае равномерного вращения:

$$a_n = \omega^2 r.$$

Полное ускорение:

$$a = \sqrt{(a_{\tau}^2) + (a_n^2)} = \sqrt{(\alpha r)^2 + (\omega^2 r)^2}, \quad \text{откуда} \quad a = r \sqrt{(\alpha^2 + \omega^4)}.$$

Направляющий тангенс полного ускорения можно определить так:

$$\operatorname{tg}(a, a_n) = a_\tau/a_n = ar/(\omega^2 r), \text{ откуда } \operatorname{tg}(a, a_n) = a/\omega^2.$$

Если направление углового ускорения совпадает с направлением вращения, то вращательное движение является ускоренным, и наоборот.

Равнопеременное вращательное движение

Если тело вращается вокруг неподвижной оси с постоянным угловым ускорением, то движение называют равнопеременным.

Формулы для этого вида вращательного движения могут быть выведены при помощи интегрального исчисления.

Итак, если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси равнопеременно, то:

$$\alpha = d\omega/dt = \text{const}, \text{ откуда } d\omega = \alpha dt.$$

Интегрируя это равенство по t , получим:

$$\int d\omega = \int \alpha dt, \text{ где } \omega \text{ изменяется от } \omega_0 \text{ (начальная угловая скорость) до } \omega, \text{ } t \text{ изменяется от } 0 \text{ до } t.$$

Получим окончательную формулу угловой скорости в следующем виде:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t.$$

Далее выведем формулу углового перемещения. Так как при любом вращательном движении

$$d\varphi/dt = \omega, \text{ то } d\varphi = \omega dt,$$

то, интегрируя это равенство по t , получим:

$$\int d\varphi = \int \omega dt = \int (\omega_0 + \alpha t) dt = \int \omega_0 dt + \int \alpha t dt; \quad \varphi - \varphi_0 = \omega_0 t + \alpha t^2/2,$$

где φ_0 – начальное угловое перемещение.

Очевидно, что в случае $\varphi_0 = 0$, формула примет вид: $\varphi = \omega_0 t + \alpha t^2/2$.

Итак, формулы для равнопеременного вращательного движения твердого тела записываются следующим образом:

$$\alpha = \text{const}; \quad \omega = \omega_0 + \alpha t; \quad \varphi = \omega_0 t + \alpha t^2/2.$$

Из этих формул можно получить формулы углового перемещения в другом виде:

$$\varphi = (\omega^2 - \omega_0^2)/(2\alpha) \text{ или } \varphi = (\omega_0 + \omega)t/2.$$

Сложное движение точки

Что такое сложное движение точки?

В предыдущей статье рассматривалось движение точки относительно одной системы координат, которую считали неподвижной. В реальном мире все находится в непрерывном движении, и неподвижная система координат в действительности не существует. Поэтому нередко возникает необходимость рассматривать движение точек одновременно по отношению к двум системам отсчета, одна из которых условно считается неподвижной, а вторая определенным образом движется по отношению к первой. Движение точки в этом случае называется сложным.

Движение точки по отношению к неподвижной системе координат называется *абсолютным*, а по отношению к подвижной системе координат – *относительным*.

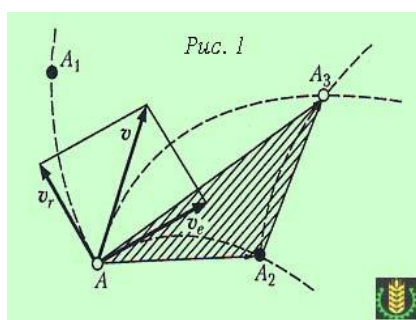
Движение подвижной системы координат по отношению к неподвижной называют *переносным движением*. Абсолютное движение точки является сложным и состоит из относительного и переносного движения.

Скорость точки в абсолютном движении называется абсолютной скоростью, а скорость точки в относительном движении называется относительной скоростью. Скорость точки, мысленно закрепленной в данный момент времени на подвижной системе координат, называется переносной скоростью. Связь между этими скоростями устанавливает теорема о сложении скоростей.

Теорема о сложении скоростей

Теорема: абсолютная скорость точки равна векторной сумме относительной и переносной скоростей.

Пусть за время Δt точка переместилась из положения A в положение A_3 , двигаясь по траектории абсолютного движения, т. е. по дуге AA_3 (см. рис. 1).



Если бы имело место только относительное движение, то точка перешла бы в положение A_2 . Можно представить, что точка A перешла в положение A_3 , двигаясь сначала только по траектории переносного движения (дуга AA_2), а затем только по траектории относительного движения (дуга A_2A_3 равная дуге AA_1). Соединив точки A , A_2 и A_3 хордами, получим следующую зависимость между векторами перемещений точки A :

$$AA_3 = AA_2 + A_2A_3.$$

Разделим все члены равенства на Δt и перейдем к пределу при Δt , стремящемся к нулю:

$$\lim (AA_3)/\Delta t = \lim (AA_2)/\Delta t + \lim (A_2A_3)/\Delta t, \quad \text{что дает} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r,$$

где: \mathbf{v} – вектор абсолютной скорости; \mathbf{v}_e – вектор переносной скорости; \mathbf{v}_r – вектор относительной скорости.

Теорема доказана.

1.3 Динамика

Основные понятия и аксиомы динамики

Динамика есть часть теоретической механики, изучающая механическое движение тел в зависимости от сил, влияющих на это движение.

Основы динамики заложил итальянский ученый Галилео Галилей (1564-1642), который опроверг существовавшее в науке со времен Аристотеля (IV в. до н.э.) заблуждение о том, что из двух тел, падающих на Землю, более тяжелое движется быстрее. Галилей установил, что причиной изменения скорости тела является сила, т. е. любое ускорение или замедление вызывается силовым воздействием. На основе выводов Г. Галилея англичанин И. Ньютон сформулировал основные аксиомы (законы) движения, ставшие фундаментом, на который сотни лет опирается классическая физика, в том числе и со-временная.

Динамика основывается на ряде положений, которые являются аксиомами и называются законами динамики. Прежде чем перейти к рассмотрению этих законов, необходимо раскрыть сущность понятий материальной точки и изолированной материальной точки. Под *материальной точкой* подразумевают некое тело, имеющее определенную массу (т. е. содержащее некоторое количество материи), но не имеющее линейных размеров (бесконечно малый объем пространства).

Изолированной считается материальная точка, на которую не оказывают действие другие материальные точки.

В реальном мире изолированных материальных точек, как и изолированных тел, не существует, это понятие является условным.

Первый закон Ньютона (первый закон динамики)

Первый закон динамики, называемый аксиомой инерции, формулируется в применении к материальной точке так: *изолированная материальная точка либо находится в покое, либо движется прямолинейно и равномерно.*

В кинематике было установлено, что прямолинейное равномерное движение является единственным видом движения, при котором ускорение равно нулю, поэтому аксиому инерции можно сформулировать следующим образом: ускорение изолированной материальной точки равно нулю.

Итак, изолированная от влияния окружающих тел материальная точка не может сама себе сообщить ускорение. Это свойство тел называют инерцией или инертностью, т. е. инертность (инерция) – свойство тел сохранять скорость по модулю и направлению (в т. ч. и покой – состояние, при котором скорость равна нулю).

Изменить скорость, т. е. сообщить материальной точке ускорение способна только приложенная к ней сила.

Второй закон Ньютона (второй закон динамики)

Зависимость между силой и сообщаемым ею ускорением устанавливает второй закон Ньютона, который гласит, что ускорение, сообщаемое материальной точке силой, имеет направление силы и пропорционально ее модулю.

Если сила F_1 сообщает материальной точке ускорение a_1 , а сила F_2 сообщает этой же точке ускорение a_2 , то на основании второго закона Ньютона можно записать:

$$F_1/F_2 = a_1/a_2 \quad \text{или} \quad F_1/a_1 = F_2/a_2.$$

Следовательно, для данной материальной точки отношение любой силы к вызываемому ею ускорению есть величина постоянная. Эту величину (отношение силы к ускорению) называют массой материальной точки, и обозначают ее m :

$$F/a = m = const.$$

На основании этого равенства можно сделать выводы: - две материальные точки, имеющие одинаковые массы, получают от одной и той же силы одинаковые ускорения; - чем больше масса точки, тем большую силу необходимо приложить, чтобы придать данной точке требуемое ускорение.

Что такое масса тела

Масса – одна из основных характеристик любого материального объекта, определяющая его инертные и гравитационные свойства. Ньютон называл массой количество материи, заключенной в теле, считая массу каждого тела величиной постоянной. Современное представление о мире, после открытий, совершенных А. Эйнштейном, опровергает этот вывод И. Ньютона – масса не является постоянной величиной для тела, она зависит от скорости, с которой это тело движется. Так, например, наблюдения за движением заряженных частиц в ускорителях показали, что инертность частицы (т. е. способность сохранять свою скорость) возрастает с увеличением ее скорости.

Теория относительности устанавливает следующую зависимость между массой тела, находящегося в покое, и массой движущегося тела:

$$m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

где m – масса движущегося тела, m_0 – масса покоящегося тела (масса покоя), v – скорость движения тела, c – скорость света.

Из этой формулы видно, что чем больше скорость движения тела, тем больше его масса и, следовательно, тем труднее сообщить ему дальнейшее ускорение. При скоростях близких к скорости света масса тела стремится к бесконечности, и для дальнейшего ускорения такого тела требуется сила бесконечной величины. Очевидно, что материальное тело не может двигаться со скоростью света, поскольку не существует реальная сила, способная ускорить его до такого состояния.

На основании теории относительности современная наука дает массе такое определение: **масса есть мера инертности тела**. Однако заметное изменение массы (инертности) тела наблюдается лишь при очень больших скоростях, близких к скорости света, поэтому в классической физике массу принимают величиной постоянной, при этом погрешности, возникающие в расчетах, являются ничтожно малыми.

Второй закон Ньютона выражается равенством:

$$F = ma,$$

которое называется основным уравнением динамики и читается так: **сила есть вектор, равный произведению массы точки на ее ускорение**. Основное уравнение динамики является уравнением движения материальной точки в векторной форме.

Ускорение свободного падения

Опытным путем установлено, что под действием притяжения Земли в вакууме тела падают с одинаковым ускорением, которое называется ускорением свободного падения.

Следует отметить, что это явление будет верным для конкретного географического места на поверхности планеты или над ее поверхностью – ускорение свободного падения не является постоянной величиной и зависит, в частности, от расстояния между центром тяжести тела и центром тяжести нашей планеты, а также от существования центробежной силы инерции, вызываемой вращением Земли. Так, на полюсах ускорение свободного падения $g \approx 9,83 \text{ м/с}^2$, а на экваторе $g \approx 9,78 \text{ м/с}^2$. Но в приближенных расчетах принимают среднее значение, равное примерно $g \approx 9,81 \text{ м/с}^2$, при этом погрешности результатов незначительны.

Итак, сила тяжести тела равна его массе, умноженной на ускорение свободного падения. Если сила тяжести одного тела $G_1 = m_1/g$, а второго тела – $G_2 = m_2/g$, то

$$G_1/G_2 = (m_1g)/(m_2g) = m_1/m_2,$$

т. е. силы тяжести тел пропорциональны их массам, что позволяет сравнивать массы различных тел путем взвешивания (сравнения их сил тяжести при помощи весов).

Из второго закона Ньютона следует, что под действием постоянной силы находившаяся в покое свободная материальная точка движется прямолинейно равнопеременно (с постоянным ускорением).

Движение под действием постоянной силы может быть и прямолинейным и криволинейным (в последнем случае материальная точка имеет начальную скорость, вектор которой не совпадает с вектором силы). Пример движения под действием постоянной силы – свободное падение тел.

Третий закон Ньютона

К основным законам динамики относится и рассмотренная в Статике аксиома взаимодействия, или третий закон Ньютона. Применительно к материальной точке закон формулируется так: **силы взаимодействия двух материальных точек по модулю равны между собой и направлены в противоположные стороны** (действие равно противодействию).

На основании этого закона можно сделать вывод, что сила, как мера взаимодействия между телами, не может проявляться без пары, т. е. если возникает какое-либо силовое воздействие, то существует и "двойник" этого силового воздействия, равный по модулю и противоположный по вектору.

Принцип независимости действия сил

Принцип независимости действия сил формулируется так: **при одновременном действии на материальную точку нескольких сил ее ускорение равно векторной сумме ускорений, которые эта точка получила бы от действия каждой силы в отдельности.**

Пусть к материальной точке A приложены силы F_1 и F_2 равнодействующая которых равна F на основании аксиомы параллелограмма запишем:

$$F_1 + F_2 = F.$$

Разделив обе части равенства на массу точки m , получим:

$$F_1/m + F_2/m = F/m, \text{ откуда имеем: } a_1 + a_2 = a.$$

Применяя последовательно аксиому параллелограмма, можно показать, что при одновременном действии на материальную точку нескольких сил ее ускорение будет таким, как если бы действовала одна равнодействующая сила $F = \Sigma F_i$.

Пользуясь изложенным выше принципом независимости действия сил, выведем уравнение движения материальной точки в дифференциальной форме.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Пусть материальная точка A массой m движется в плоскости чертежа под действием равнодействующей силы $F = \Sigma F_i$ с ускорением a , тогда:

$$F = ma.$$

Спроецируем это векторное равенство на две взаимно-перпендикулярные оси координат x и y (оси и вектор силы F лежат в одной плоскости) и получим уравнение плоского движения материальной точки в координатной форме:

$$F_x = \Sigma X = ma_x; \quad F_y = \Sigma Y = ma_y.$$

Применяя теорему о проекции ускорения на координатную ось, эти уравнения можно записать в виде дифференциальных уравнений плоского движения точки:

$$\Sigma X = m(d^2x/dt^2); \quad \Sigma Y = m(d^2y/dt^2),$$

где ΣX и ΣY – алгебраические суммы проекций сил, действующих на точку, на соответствующие координатные оси; x и y – текущие координаты точки.

С помощью полученных дифференциальных зависимостей решаются две основные задачи динамики:

- ◆ по заданному движению точки определяют действующие на нее силы;
- ◆ зная действующие на точку силы, определяют ее движение.

В тех случаях, когда при решении задач имеем дело с несвободной материальной точкой, необходимо применять принцип освобожденности, т. е. отбросить связи и заменить их реакциями, учитывая последние в уравнении движения наравне с действующими на точку активными силами.

Пример решения первой задачи динамики

Задача: движение тела массой $m = 0,5$ кг выражается уравнениями:

$$x = 2t; \quad y = 3 + t - 5t^2,$$

где x и y (в сантиметрах) – координаты точки в момент времени t (в секундах).

Определить силу, действующую на тело.

Решение. Данный пример относится к первой задаче динамики. Прежде всего, пользуясь теоремой о проекции ускорения на координатную ось, определим проекции ускорения на оси x и y :

$$a_x = d^2x/dt^2 = 0; \quad a_y = d^2y/dt^2 = -10 \text{ см/с}^2 = -0,1 \text{ м/с}^2.$$

Подставив эти значения в уравнение движения материальной точки, получим:

$$X = ma_x = 0,5 \times 0 = 0 \text{ Н}; \quad Y = ma_y = 0,5 \times (-0,1) = -0,05 \text{ Н}.$$

По полученным значениям проекций силы на координатные оси можно сделать вывод, что она параллельна оси ординат, направлена в сторону отрицательных ординат и по модулю равна:

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2} = |Y| = 0,05 \text{ Н}.$$

Задача решена.

Пример решения второй задачи динамики

Задача: на материальную точку массой $m = 4$ кг, лежащую на гладкой горизонтальной плоскости, действует горизонтальная сила $F = 12$ Н. С какой скоростью будет двигаться материальная точка через время $t = 10$ с, если до приложения силы точка находилась в состоянии покоя?

Решение. Данный пример относится ко второй задаче динамики. Так как данная материальная точка лежит на гладкой горизонтальной плоскости, то под действием горизонтальной постоянной силы F точка будет двигаться прямолинейно равноускоренно. Направив координатную ось x вдоль траектории движения точки (вдоль вектора силы F), запишем уравнение ее движения:

$$\Sigma X = ma_x = ma.$$

Спроецировав на ось x действующие на точку силы, и подставив в это уравнение значение массы m , определим ускорение точки:

$$a = \Sigma X/m = F/m = 12/4 = 3 \text{ м/с}^2.$$

Применим формулу скорости равноускоренного движения и подставим в нее значения, получим:

$$v = v_0 + at = at = 3 \times 10 = 30 \text{ м/с}.$$

Задача решена.

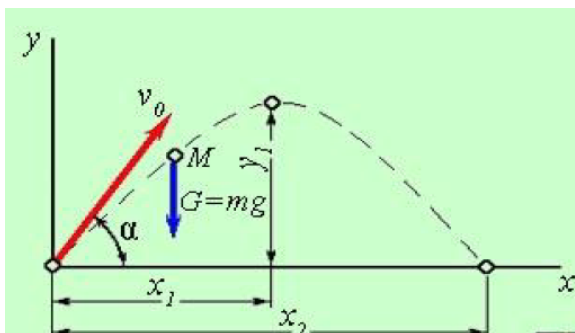
Движение материальной точки, брошенной под углом к горизонту
Рассмотрим материальную точку M массой m , брошенную из точки O поверхности Земли с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту (см. рис. 1).

Определим движение точки M , считая, что на нее действует только сила тяжести G (сопротивлением воздуха пренебрегаем).

Возьмем начало координат в точке O , ось x направим по горизонтали вправо (в направлении траектории, по которой движется точка), а ось y – по вертикали вверх. Очевидно, что проекция ускорения на ось x будет равна нулю, поскольку единственная сила, действующая на точку – сила тяжести – направлена вертикально вниз (вдоль оси y), а согласно аксиоме Ньютона, без силы нет и ускорения.

Составим дифференциальные уравнения, описывающие движение точки:

$$m (d^2x/dt^2) = 0; \quad m(d^2y/dt^2) = -mg.$$



Сокращая равенства на m , получим:

$$d^2x/dt^2 = 0; \quad (1) \quad d^2y/dt^2 = -g. \quad (2)$$

Интегрируя первое из этих уравнений (1), получим:

$$dx/dt = C_1, \text{ где } C_1 \text{ – некоторая произвольная постоянная.}$$

Следовательно, проекция скорости точки M на ось x все время остается величиной постоянной, равной $v_x = v_0 \cos \alpha$ или, на основании результата интегрирования уравнения (1), можно записать:

$$dx/dt = v_0 \cos \alpha.$$

Интегрируя это уравнение, получаем:

$$x = v_0 t \cos \alpha + C_2.$$

По условию при $t = 0 \quad x = 0$, следовательно, произвольная постоянная C_2 равна нулю. Окончательно имеем:

$$x = v_0 t \cos \alpha.$$

Интегрируем уравнение (2), находим:

$$v_y = dy/dt = -gt + C_3.$$

Подставив в это уравнение значение $t = 0$, найдем произвольную постоянную C_3 :

$$C_3 = v_y = v_0 \sin \alpha, \text{ следовательно:}$$

$$dy/dt = v_0 \sin \alpha - gt.$$

Интегрируя вторично, получаем:

$$y = v_0 t \sin \alpha - gt^2/2 + C_4.$$

Поскольку по условию $t = 0 \quad y = 0$, следовательно, произвольная постоянная C_4 равна нулю. Окончательно получаем:

$$y = v_0 t \sin \alpha - gt^2/2.$$

Таким образом становится очевидным, что материальная точка M , брошенная с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту, движется согласно уравнениям:

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad (3) \quad y = v_0 t \sin \alpha - gt^2/2. \quad (4)$$

Определение траектории, высоты и дальности полета

Для определения траектории точки M исключаем из полученной системы уравнений движения время. Для этого из формулы (3) выражаем время: $t = x/(v_0 \cos \alpha)$ и подставляем это значение в формулу (4). Получим уравнение траектории:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - gx^2/(2v_0^2 \cos^2 \alpha).$$

Траектория точки M представляет собой параболу с вертикальной осью симметрии.

Определим время полета точки M , для чего во второе уравнение движения (4) подставим значение $y = 0$. Тогда уравнение движения примет вид:

$$v_0 t \sin \alpha - gt^2/2 = 0.$$

Отсюда находим два значения времени t , при которых ордината равна нулю (*корни уравнения*):

$$t_0 = 0; \quad t_2 = (2v_0 \sin \alpha)/g.$$

Первое значение времени соответствует началу полета, второе – конечной точке траектории полета. Тогда общая продолжительность полета будет равна:

$$t_2 - t_0 = t_2 = (2v_0 \sin \alpha)/g.$$

Определим дальность полета по горизонтали, для чего в уравнение движения (3) подставим значение времени t_2 :

$$x_2 = v_0 t_2 \cos \alpha = (v_0 \cos \alpha \times 2v_0 \sin \alpha)/g \quad \text{или} \quad x_2 = v_0 t_2 \cos \alpha = (v_0^2 \sin 2\alpha)/g.$$

Из полученного уравнения можно сделать вывод, что максимальная дальность полета x_{\max} имеет место при $\sin 2\alpha = 1$, т. е. при $\alpha = \pi/4$ рад:

$$x_{\max} = v_0^2/g.$$

Определим наибольшую высоту подъема точки M , т. е. ее ординату в тот момент времени t_1 , когда проекция скорости на ось y окажется равной нулю:

$$dy/dt = v_y = v_0 \sin \alpha - gt_1 = 0.$$

Из полученного равенства определим t_1 :

$$t_1 = (v_0 \sin \alpha) / g = t^2 / 2.$$

Следовательно, наибольший подъем точки имеет место в середине пути полета, при $x_1 = x^2 / 2$.

Подставив значение t_1 в уравнение (4), получим:

$$y_1 = (v_0 \sin \alpha \times v_0 \sin \alpha) / g - g v_0^2 \sin^2 \alpha / (2g^2).$$

Из полученного уравнения можно сделать вывод, что максимальной высоты точка достигает при $\sin \alpha = 1$ или при $\alpha = \pi / 2$ рад, т. е. когда точка брошена под углом 90° к горизонту (*вертикально вверх*).

Полученные формулы и зависимости позволяют решать различные задачи на движение тел и точек под действием силы тяжести в приближенной форме, поскольку они не учитывают силы сопротивления движению со стороны воздуха (аэродинамическое сопротивление).

ОСНОВЫ КИНЕТОСТАТИКИ

Метод кинестатики в динамике. Принцип Даламбера

Как известно, первый закон Ньютона гласит, что любое тело, любая материальная точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока какая-нибудь сила не нарушит это состояние. Этот закон называют законом инерции, а свойство материальных тел «неохотно» изменять свое текущее состояние покоя – инертностью.

Явление инертности использовал в идее оригинального принципа динамических расчетов французский ученый **Ж. Д'Аламбер** (*д'Аламбер, Даламбер; фр. Jean Le Rond D'Alembert, d'Alembert, 1717-1783*), по имени которого этот принцип и назван. Принцип Д'Аламбера (Даламбера) широко применяется для решения задач динамики методами кинестатики.

Справедливости ради, следует отметить, что несколько раньше Д'Аламбера возможность решения задач динамики с помощью приемов статики изучали такие видные российские ученые Петербургской Академии наук, как Я. Герман и Л. Эйлер, жившие примерно в одно время с Даламбером.

Итак, что же такое принцип Д'Аламбера и чем он может быть полезен при решении задач динамики? Сначала вспомним статику, где все легко и просто – любое тело или материальная точка будет нахо-

дится в равновесии, если действующие на него силовые факторы уравновешивают друг друга. Все очевидно, просто и понятно. Благодаря приемам статики можно определить неизвестные активные или реактивные силы, действующие на уравновешенное тело или точку, применив простые математические приемы и геометрические построения. Нельзя ли эти приемы использовать для подвижных тел, причем не просто подвижных, а движущихся с ускорением? Оказывается можно, а иногда даже просто необходимо, как указал знаменитый француз, увековечивший свое имя в известном потомкам принципе.

Представим себе материальную точку массой m движущуюся с ускорением a под действием какой-

то системы активных и реактивных сил, равнодействующая которых равна F . Воспользуемся вторым (основным) законом динамики для того, чтобы уравнение движения этой точки записать в форме уравнений равновесия:

$$F + (- ma) = 0.$$

Выражение, стоящее в скобках называют *силой инерции*, и обозначают $F^{ин}$. Итак:

$$F^{ин} = - ma.$$

Сила инерции есть вектор, равный произведению массы материальной точки на ее ускорение в данный момент времени, и направлен в сторону, противоположную ускорению. На основании этого определения можно записать:

$$F + F^{ин} = 0 \quad \text{или} \quad \Sigma(F, F^{ин}) = 0.$$

Это равенство и является математическим выражением принципа Д'Аламбера, который формулируется так: активные и реактивные силы, действующие на материальную точку, вместе с силами инерции образуют систему взаимно уравновешенных сил, удовлетворяющих всем условиям равновесия. Т. е. Д'Аламбер предложил оригинальный способ применения методов статики к движущимся материальным точкам, используя при этом в качестве основного инструмента понятие инертности и силы инерции.

Утверждение, что тело якобы находится в состоянии равновесия во время ускоренного движения, может вызвать недоумение. Как это может быть? Здесь следует отметить, что сила инерции, введенная в научную терминологию Д'Аламбером, является понятием условным, т. е. фактически такой силы в природе не существует, в отличие от понятия инертности - свойства любых материальных тел и точек, проявляющееся в стремлении сохранять свое состояние. Но именно условное уравновешивание силой инерции движущихся с ускорением тел, позволило использовать при решении задач динамики приемы статики, породив раздел теоретической механики - кинестатику.

Явление инертности (инерции) можно пояснить на таком простом примере. Если подвесить на нити груз, который она легко выдержит в статическом состоянии, а затем резко дернуть за конец нити, то она порвется именно благодаря инертности груза. Другой пример: если тяжелое чугунное ядро попытаться сдвинуть с места, то потребуется приложить немалое усилие, чтобы оно покатилося. Когда же ядро, наконец, покатилося, для его остановки потребуется, опять же, немалое мускульное усилие. В каждом из этих случаев наглядно проявляется свойство инертности материальных тел.

Пример решения задачи методом кинестатики

Задача: в кабине лифта размещены пружинные весы, на которых установлен груз. Когда кабина неподвижна показание весов составляет 50 Н , а при движении лифта показание весов увеличилось до 51 Н . Определить, с каким ускорением движется кабина лифта.

Решение. Применим к телу принцип освобожденности, отбросим пружинные весы и заменим их реакцией R , равной натяжению пружины. Для решения задачи применим метод кинестатики, т. е. приложим к телу силу инерции $F^{ин}$. Составим уравнение равновесия взвешиваемого тела, спроецировав все силы на вертикальную ось y ; предполагаем, что ускорение a кабины направлено вверх, и, следовательно, сила инерции направлена вниз (т. е. в противоположную ускорению сторону):

$$\Sigma Y = 0; \quad R - G - F^{ин} = 0.$$

Модуль силы инерции определяем по формуле:

$$F^{ин} = ma = (G/g)a.$$

Подставив это выражение в уравнение, определим ускорение:

$$a = (R - G)g/G = (51 - 50) \times 9,81/50 = 0,196 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение получилось положительным, следовательно мы изначально правильно предположили, что оно направлено вверх (если бы получилось отрицательное значение, значит ускорение направлено вниз).

Задача решена.

Силы инерции в криволинейном движении

В криволинейном движении точки полное ускорение равно векторной сумме касательного (тангенциального) и нормального (центростремительного) ускорений.

Касательное ускорение определяется по формуле $a_{\tau} = dv/dt$, нормальное ускорение $a_n = v^2/\rho$, полное ускорение $a = \sqrt{(a_{\tau}^2 + a_n^2)}$.

Каждому ускорению соответствует своя сила инерции:

- ◆ Касательная (тангенциальная) сила инерции: $F_{\tau}^{ин} = m dv/dt$;
- ◆ Нормальная (центробежная) сила инерции: $F_n^{ин} = mv^2/\rho$;
- ◆ Полная сила инерции: $F^{ин} = ma$.

В качестве примера рассмотрим равномерное движение по окружности, лежащей в горизонтальной плоскости, камня силой тяжести G , привязанного невесомой нитью длиной r , расположенной в той же

плоскости (рис. 1). Чтобы нить оставалась в плоскости движения камня, предполагается, что он скользит по идеально гладкой горизонтальной плоскости. Скорость движения камня обозначим v .

Тогда $F_n^{ин} = mv^2/r$ - центробежная сила инерции (эта сила натягивает нить); $R = mv^2/r$ - центростремительная сила, приложенная к камню (эта сила удерживает камень на круговой траектории). Обе эти силы, согласно второму закону Ньютона, равны по модулю и направлены в противоположные стороны, т. е. уравнивают друг друга. Очевидно, что касательная сила в данном примере будет равна нулю, поскольку камень движется равномерно ($a_t = 0$).

Из опыта известно, что при достаточной скорости камня нить может не выдержать и разорваться, тогда камень полетит по касательной к окружности, т. е. по направлению имеющейся в момент разрыва нити скорости. Это доказывает, что центробежная сила инерции есть реальная сила для связи, но к телу она приложена условно.

Внутри тел, движущихся с ускорением, также возникают внутренние силы инерции, так как для каждой частицы тела соседние являются связями.

Найдем, чему будет равно натяжение нити, если камень движется по окружности, лежащей в вертикальной плоскости (рис. 2). Для определения натяжения R нити применим принцип Д'Аламбера, т. е. приложим к камню нормальную силу инерции $F_n^{ин}$ и касательную силу инерции $F_t^{ин}$.

Спроецируем все силы в направлении нити, в результате чего получим:

$$R - G \cos \alpha - F_n^{ин} = 0, \quad \text{откуда:} \quad R = F_n^{ин} + G \cos \alpha = mv^2/r + G \cos \alpha.$$

Очевидно, что натяжение нити будет максимальное при $\alpha = 0$, т. е. когда камень находится в нижнем положении:

$$R_{max} = mv^2/r + G.$$

Минимальное натяжение нити имеет место, когда $\alpha = \pi \text{ рад}$, т. е. в тот момент, когда камень находится в верхнем положении:

$$R_{\min} = mv^2/r - G.$$

Следует отметить, что под влиянием силы тяжести в данном случае модуль скорости камня будет изменяться от максимума в нижнем положении до минимума в верхнем положении.

Если выразить линейную скорость камня через угловую скорость нити, используя зависимость $v = \omega r$, то формула центробежной силы примет вид:

$$F_n^{\text{ин}} = m\omega^2/r.$$

Пример решения задачи с использованием принципа Д'Аламбера

Задача: определить скорость v искусственного спутника Земли, движущегося по круговой орбите на высоте $h = 230$ км от поверхности Земли, радиус которой принять равным $R = 6370$ км. Изменением ускорения свободного падения и сопротивлением атмосферы пренебречь.

Решение. После того, как ракета-носитель вывела спутник массой m на орбиту и сообщила ему скорость v , направленную по касательной к орбите, спутник продолжает движение под действием одной лишь силы притяжения Земли. Для определения скорости v спутника применим принцип Д'Аламбера, т. е. приложим к спутнику центробежную силу инерции и составим уравнение равновесия, спроецировав все силы на ось, проходящую через спутник и центр Земли:

$$mg - F_n^{\text{ин}} = 0.$$

Так как $F_n^{\text{ин}} = mv^2/(R + h)$, то можно записать: $mg - mv^2/(R + h) = 0$.

Сократив члены этого равенства на m (массу спутника), получим:

$$v = \sqrt{[g(R + h)]}.$$

Подставив значения, получим: $v = \sqrt{[9,81(6370 + 230)1000]} \approx 8000 \text{ м/с} \approx 8 \text{ км/с}$.

Задача решена.

Библиографический список

Основная литература:

1. Лукьянов А.М. Техническая механика. – М.: ФГБОУ «Учебно-методический центр образования на железнодорожном транспорте», 2014. – 711 с.

Дополнительная литература:

2. Аркуша А.И. Техническая механика. Теоретическая механика и сопротивление материалов : учебник для средних учебных заведений. – 6-е изд. – М.: Высшая школа, 2005. – 352 с.
3. Брюховецкая Т.М. Техническая механика. Расчет механических передач: методическое пособие. – М.: ГОУ «УМЦ ЖДТ», 2006. – 327 с.
4. Лукьянов А.М. Сопротивление материалов. – М.: ГОУ «УМЦ ЖДТ», 2008. – 235 с.
5. Олофинская В.П. Техническая механика: курс лекций с вариантами практических и тестовых заданий / В.П. Олофинская. – 3-е изд., испр. – М.: Форум, 2010. – 365 с.

Электронные образовательные ресурсы:

6. Электронный ресурс «Техническая механика». – Форма доступа: technical-mechanics.narod.ru

БИЧЕГКУЕВА Д.М.

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Лицензия: ЛР. № 020574 от 6 мая 1998 г.

*Электронная версия 05.11.2025 г.
Бумага формат А4 (210x297) масса 80 г/м2.
Усл. печ. л. 3,5. Заказ 102.*

*362040, Владикавказ, ул.Кирова, 37.
Типография ФГБОУ ВО Горский ГАУ*